



CENTRO NACIONAL
DE EVALUACIÓN PARA
LA EDUCACIÓN SUPERIOR, A.C.

CENEVAL®

formulario

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería
Electrónica

Dirección de los EGEL

ENERO • 2021

Formulario

**Examen General para el
Egreso de la Licenciatura
en Ingeniería Electrónica**

EGEL-IELECTRO



Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C.

Formulario

D. R. © 2020
Centro Nacional de Evaluación
para la Educación Superior, A. C. (Ceneval)

Décimo segunda edición

Directorio

Antonio Ávila Díaz

Director General

Alejandra Zúñiga Bohigas

Directora de los Exámenes
Generales para el Egreso de la Licenciatura

Wilson Jesús Pool Cibrián

Subdirector de Evaluación de Egreso en
Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Eloín Alarcón Maldonado

Responsable del Examen General para el Egreso
de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica

Contenido

Administración de sistemas electrónicos.....	11
Operación y mantenimiento de sistemas electrónicos.....	11
Inversión inicial	11
Tasa mínima aceptable de rendimiento.....	11
Tasa mínima aceptable de rendimiento mixta	11
Valor presente neto (con TMAR).....	12
Valor presente neto (con anualidad e interés).....	12
Tasa interna de retorno	12
Periodo de recuperación de la inversión	13
Punto de equilibrio en ventas	13
Costo beneficio	13
Ingeniería económica.....	14
Interés simple	14
Interés compuesto	14
Valor futuro pago único.....	14
Valor presente pago único	14
Cantidad compuesta serie uniforme.....	14
Fondo de amortización	15
Recuperación del capital de una serie uniforme	15
Valor presente de una serie uniforme.....	15
Series de gradiente.....	15
Tasa efectiva de interés anual	15
Capitalización continua	15
Definición de “e”	16
Pagos continuos	16
Tasa mixta.....	16
Métodos de análisis de inversiones.....	17
Valor presente	17
Valor futuro.....	17
Costo anual uniforme equivalente (CAUE)	17
Serie uniforme equivalente	17
Recuperación de capital	17
Retiro y reemplazo.....	17
Tasa interna de retorno.....	17
Periodo de recuperación.....	17
Razón costo-beneficio	18
Diseño e integración de sistemas electrónicos.....	19
Construcción e implementación de sistemas electrónicos.....	19
Comunicaciones	19
Radiofrecuencia.....	19
Parámetros de dispersión	24

Líneas de transmisión	25
Impedancia característica	25
Línea de transmisión de tipo microcinta	26
Impedancia característica de líneas de microcinta paralelas	26
Constante de propagación	27
Velocidad de propagación.....	27
Tiempo de retardo	27
Ondas estacionarias	27
Coeficiente de reflexión	27
Relación de onda estacionaria (SWR) y el coeficiente de reflexión (Γ)	28
Impedancia de entrada (Z_{in})	28
Tabla de parámetros distribuidos	29
Antenas.....	30
Ganancia directiva.....	30
Resistencia de radiación.....	30
Ancho de banda de la antena	30
Longitud efectiva	30
Área efectiva	30
Densidad de potencia radiada.....	30
Impedancia característica del medio	30
Potencia total radiada	30
Directividad.....	31
Lóbulo	31
Ancho del haz principal.....	31
Intensidad del campo.....	31
Conectores	32
RJ45.....	32
RJ11.....	33
VGA	34
USB.....	35
DB9.....	35
DB-25.....	36
IEEE.488.....	37
RS-232 DB9	38
RS – 422/485 DB – 9.....	39
Formulario general	40
Matemáticas	40
Álgebra.....	40
Álgebra lineal.....	46
Cálculo diferencial	48
Cálculo integral.....	53
Geometría	63
Geometría analítica plana.....	65
Geometría analítica del espacio.....	67
Trigonometría	71
Números complejos	77
Análisis vectorial.....	79
Fracciones racionales.....	86
Series de Fourier	87
Transformada de Fourier	91
Transformada de Laplace	95

Probabilidad y estadística	100
Física	106
Mecánica.....	106
Electricidad y magnetismo	116
Química	121
Análisis de circuitos eléctricos.....	123
Ley de Ohm con fasores.....	123
Voltaje y corriente en elementos reactivos(con condiciones iniciales iguales a cero)	123
Divisor de corriente.....	124
Divisor de voltaje	124
Leyes de Kirchhoff	125
Potencia	126
Resonancia RLC serie	127
Resonancia RLC paralelo	128
Circuitos excitados con señales senoidales de diferentes frecuencias.....	129
Impedancia y admitancia de una red pasiva de dos terminales	130
Teoremas de redes.....	131
Parámetros de dos puertos.....	133
Respuesta transitoria.....	135
Función de transferencia	141
Diagramas de Bode asintóticos.....	142
Sistemas acoplados.....	143
Sistemas trifásicos.....	144
Potencia trifásica	146
Electrónica analógica.....	147
Diodo de propósito general	147
Diodo Zener.....	147
Rectificadores de media onda y onda completa (fuentes de alimentación)	148
Transistor de unión bipolar (BJT)	151
Transistor de efecto de campo (FET).....	161
Transistor MOSFET.....	168
Amplificadores operacionales	169
Filtros activos	175
Filtros pasivos.....	179
Convertidores	180
Amplificadores de corriente.....	182
Electrónica digital.....	186
Algebra de Boole	186
Mapa de Karnaugh	187
Conversión de decimal a BCD natural, BCD Aiken y BCD exceso 3.....	188
Circuitos digitales básicos.....	189
Flip-flops.....	190
Electrónica de potencia	192
Fórmulas básicas.....	192
Dispositivos	194
Teoría de control.....	204
Terminología de la ingeniería de control.....	204
Modelos de control	204
Tipos de respuesta	205

Regla de Mason	209
Controladores	210
Comunicaciones	213
Osciladores	213
Modulación y demodulación AM-FM	218
Decibel	219
Oscilador de relajación UJT	220
Oscilador de relajación PUT	221
Instrumentación	223
Valor promedio	223
El valor rms	223
Errores en medición.....	223
Puentes de Wheatstone.....	224
Puente de Kelvin	225
Ruido térmico o ruido de Jhonson	225
Termopar.....	225
Termistor	227
Sensores	228
Transformada Z	233
Tablas adicionales de datos prácticos.....	234
Consejo Técnico.....	240

Administración de sistemas electrónicos Operación y mantenimiento de sistemas electrónicos

Inversión inicial

$$II = CO + CP + CA$$

donde:

II = Inversión inicial

CO = Costos de operación

CP = Costos de producción

CA = Costos de administración y ventas

Tasa mínima aceptable de rendimiento

$$TMAR = (\mu * i)^n$$

donde:

TMAR = Tasa mínima aceptable de rendimiento

μ = Monto

i = Tasa de interés

n = Número de periodos a considerar

Tasa mínima aceptable de rendimiento mixta

$$TMAR_{mixta} = [I_1 + PR_1 + \%I_1 + \%PR_1] + [I_2 + PR_2 + \%I_2 + \%PR_2] + \dots + [I_n + PR_n + \%I_n + \%PR_n]$$

donde:

TMAR_{mixta} = Tasa mínima aceptable de rendimiento mixta

I_n = Inflación

PR_n = Premio al riesgo

%I_n = Inflación ÷ 100

%PR_n = Premio al riesgo ÷ 100

Valor presente neto (con TMAR)

$$VPN = -S_0 + \sum_{t=1}^n \frac{St}{(1+i)^t}$$

donde:

VPN = Valor presente neto

S_0 = Inversión inicial

St = Flujo de efectivo neto del periodo t

N = Número de periodos de la vida del proyecto

i = Tasa de recuperación mínima atractiva

Valor presente neto (con anualidad e interés)

$$VPN = -P + A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] + VS$$

donde:

VPN = Valor presente neto

P = Inversión inicial

A = Anualidad

i = Tasa de interés

VS = Valor de salvamento al final del periodo n

n = Número de periodos

Tasa interna de retorno

$$TIR = \sum_{1}^n \frac{FNE_n}{(1+i)^n} + \frac{VS}{(1+i)^n}$$

donde:

TIR = Tasa interna de retorno

FNE = Flujo neto de efectivo del periodo n , o beneficio neto después de impuesto más depreciación

VS = Valor de salvamento al final del periodo n

i = Tasa de interés

n = Número de periodos

Periodo de recuperación de la inversión

$$ROI = \frac{UN}{I}$$

donde:

ROI = Periodo de recuperación de la inversión

UN =Utilidad neta

I =Inversión

Punto de equilibrio en ventas

$$PE = \frac{CF}{1 - \frac{CV}{VT}}$$

donde:

PE = Punto de equilibrio

CF = Costos fijos

CV = Costos variables

VT = Ventas totales

Costo beneficio

$$\frac{B}{C} = \frac{B - D}{C}$$

donde:

B = Beneficios asociados al proyecto

C = Costo neto del proyecto

D = Valor de las desventajas

Ingeniería económica

Glosario de términos para ingeniería económica

I:	Inversión	$\hat{A}$:	Factor de pago continuo
n:	Periodo	RC:	Factor de recuperación de capital
i:	Tasa de interés	Vs:	Valor de salvamento
P:	Valor presente	Θ :	Tasa mixta
F:	Valor futuro	Pr:	Periodo de recuperación
A:	Serie uniforme	B:	Beneficio
G:	Gradiente	C:	Costo
I_{ef} :	Tasa efectiva	D:	Desventaja
R:	Tasa de interés divisible	e:	Base de logaritmos neperianos
m:	Periodo de intervalo		

Interés simple

$$I = niP$$

Interés compuesto

$$i = \sqrt[n]{\frac{F}{I}} - 1$$

Valor futuro pago único

$$F = P(1+i)^n$$

Valor presente pago único

$$P = F \frac{1}{(1+i)^n}$$

Cantidad compuesta serie uniforme

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Fondo de amortización

$$A = F \left(\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right)$$

Recuperación del capital de una serie uniforme

$$A = P \left(\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right)$$

Valor presente de una serie uniforme

$$P = A \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right)$$

Series de gradiente

$$A = G \left(\frac{\frac{1}{i - n}}{(1+i)^n - 1} \right)$$

Tasa efectiva de interés anual

$$i_{ef} = \left(1 + \frac{r}{m} \right)^m - 1$$

Capitalización continua

$$i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m} \right)^m - 1 = e^r - 1$$

Definición de “e”

$$i = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m = e$$

$$\frac{F}{P} = e^m$$

$$\frac{P}{F} = e^{-m}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{(e^m - 1)}{(e^r - 1)}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{(1 - e^{-m})}{(e^r - 1)}$$

$$\frac{A}{G} = \left(\frac{1}{1 - e^{-m}} \right) - \left(\frac{n}{e^m - 1} \right)$$

Pagos continuos

$$\frac{F}{\hat{A}} = \frac{(e^m - 1)}{r}$$

$$\frac{P}{\hat{A}} = \frac{(e^m - 1)}{re^m}$$

Tasa mixta

$$\theta = \frac{(i - \lambda)}{(1 - \lambda)}$$

Métodos de análisis de inversiones

Valor presente

$$Vp = \sum_{j=0}^n Flujo(P / F, i, j)$$

Valor futuro

$$Vp = \sum_{j=0}^n Flujo(F / P, i, j)$$

Costo anual uniforme equivalente (CAUE)

$$Vp = \left(\sum_{j=0}^n Flujo(P / F, i, j) \right) * (A / P, i, j)$$

Serie uniforme equivalente

$$SAUE = -CAUE$$

Recuperación de capital

$$CAUE = -SAUE = RC$$

$$(P - V_s) \left(\frac{A}{P, i, n} \right) + iV_s$$

Retiro y reemplazo

$$CAUE(j) = RC(j) + A(j)$$

Tasa interna de retorno

$$Vp = - Flujo \text{ inicial} + \left(\sum_{j=1}^n Flujo(P / F, i, j) \right)$$

Periodo de recuperación

$$Pr = \frac{ABS(flujo)}{\text{ingreso por periodo}}$$

Razón costo-beneficio

$$\frac{B}{C} = B - \frac{D}{C}$$

Nota: El ROI no se maneja en este contexto ya que es un indicador financiero.

Diseño e integración de sistemas electrónicos

Construcción e implementación de sistemas electrónicos

Comunicaciones

Radiofrecuencia

Criterio de estabilidad de Linville

$$C = \frac{|Y_r Y_t|}{2g_1 g_0 - \operatorname{Re}(Y_r Y_t)}$$

Si $C < 1$ el transistor es incondicionalmente estable

Si $C > 1$ el transistor es potencialmente inestable

Factor de estabilidad de Stern

$$K = \frac{2(g_1 + G_s)(g_0 + G_L)}{|Y_r Y_t| + \operatorname{Re}(Y_r Y_t)}$$

Ganancia máxima disponible en el transistor (MAG)

$$MAG = \frac{|Y_r|^2}{4g_1 g_0}$$

donde:

Y_r = La admitancia de transferencia inversa

Y_t = La admitancia de transferencia directa

g_1 = La conductancia de entrada

g_0 = La conductancia de salida

Re = La parte real del producto entre paréntesis

G_s = La conductancia de la fuente

G_L = La conductancia de la carga

Criterio de estabilidad incondicional en términos de los parámetros S

$$K = \frac{1 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 + |\Delta|^2}{2|S_{12}S_{21}|} > 1$$

donde:

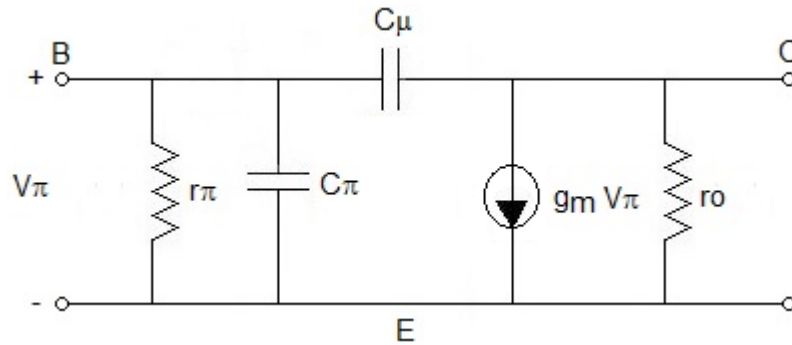
$$\Delta = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} < 1$$

Teorema de Miller

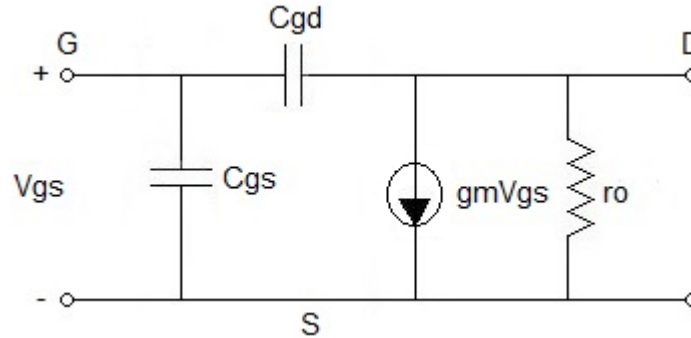
$C_{ent(Miller)} = C_{bo} (1 + A_v)$	Capacitancia de entrada Miller, donde $C=C_{bo}$
$C_{sal(Miller)} = C_{bo} \left(\frac{1 + A_v}{A_v} \right)$	Capacitancia de salida Miller, donde $C=C_{bo}$

donde: C_{bo} es la capacitancia entre la entrada y la salida del amplificador.

Respuesta en frecuencia de un amplificador



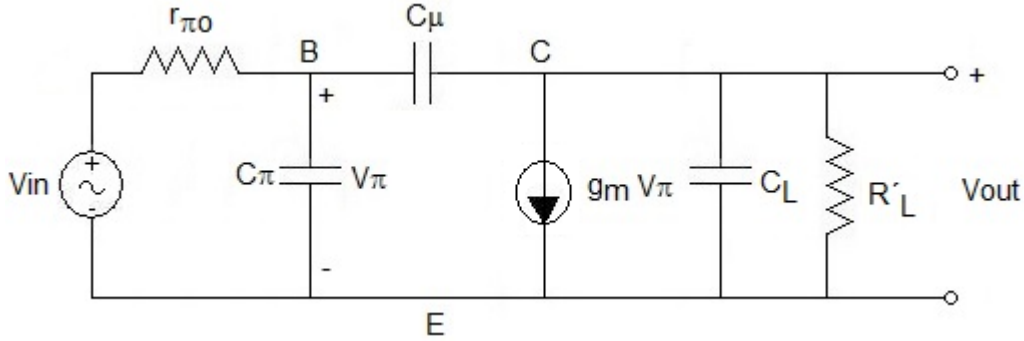
Modelo de señal pequeña del BJT



Modelo de señal pequeña del FET

Respuesta en altas frecuencias de un amplificador emisor común (BJT)

Modelo equivalente de señal pequeña del amplificador



Los polos del circuito son:

$$f_{p1} = \frac{1}{2\pi r_{\pi0} \left(\left[C_{\pi} + C_{\mu} (1 + g_m R_L) \right] + \frac{R_L}{r_{\pi0}} \left[(C_{\mu} + C_L) \right] \right)}$$

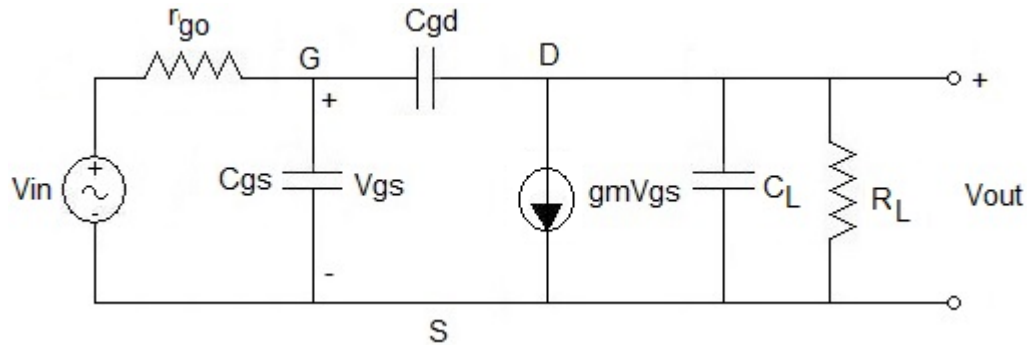
$$f_{p2} = \frac{C_{\pi} g_L + C_{\mu} (g_m + g_{\pi0} + g_L) + C_L g_{\pi0}}{2\pi C_{\pi} (C_{\mu} + C_L) + C_{\mu}} \cong \frac{g_m}{C_{\pi} + C_L}$$

donde:

$$R_L = \frac{1}{g_L}$$

$$r_{\pi0} = \frac{1}{g_{\pi0}}$$

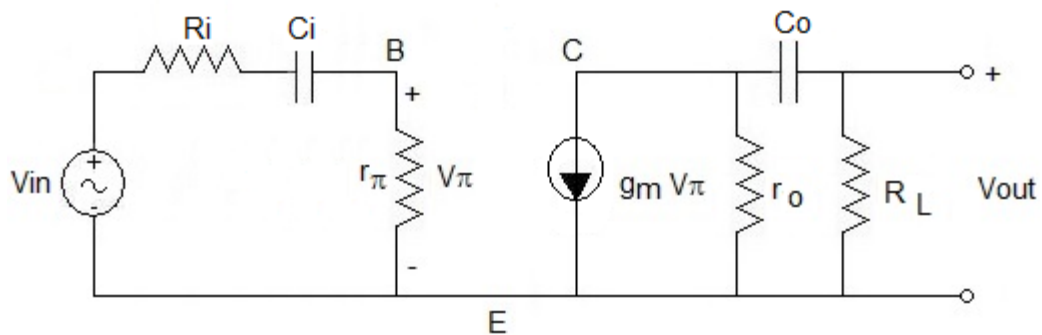
Respuesta en altas frecuencias de un amplificador fuente común (FET)



Considere el caso anterior (Respuesta en altas frecuencias de un amplificador emisor común (BJT)) y en las expresiones según la figura.

Respuesta en bajas frecuencias de un amplificador emisor común (BJT)

Si $C_i \gg C_\pi$ y C_μ es despreciable



La función de transferencia está dada por: C

$$H(s) = \frac{\frac{r_\pi}{R_i + r_\pi} \frac{r_o}{R_L + r_o} g_m R_L s^2}{\left(s + \frac{1}{C_i (R_i + r_\pi)} \right) \left(s + \frac{1}{C_o (r_o + R_L)} \right)}$$

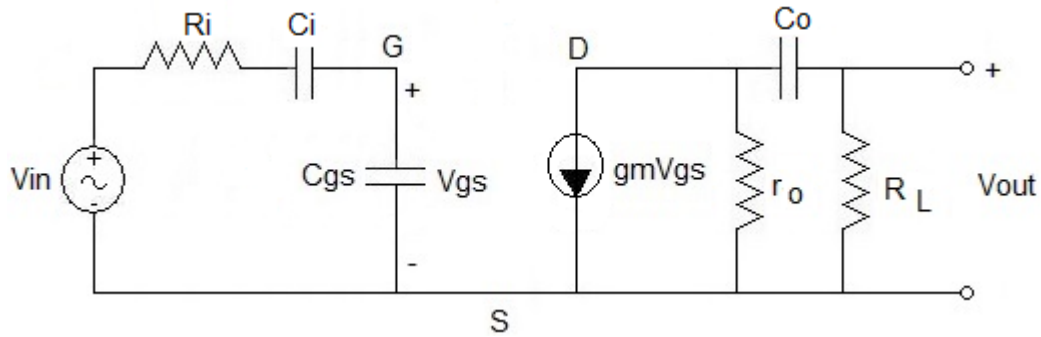
Los polos del circuito están dados por:

$$f_{p1} = \frac{1}{2\pi C_i (R_i + r_\pi)}$$

$$f_{p2} = \frac{1}{2\pi C_o (r_o + R_L)}$$

Respuesta en bajas frecuencias de un amplificador fuente común (FET)

Si C_μ es despreciable:



La función de transferencia está dada por:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_i C_{gs}} \frac{r_o}{R_L + r_o} g_m R_L s}{\left(s + \frac{1}{R_i} \frac{C_i + C_{gs}}{C_i C_{gs}} \right) \left(s + \frac{1}{C_o (r_o + R_L)} \right)}$$

y los polos del circuito son:

$$f_{p1} = \frac{1}{2\pi R_1 \frac{C_i C_{gs}}{C_i + C_{gs}}}$$

$$f_{p2} = \frac{1}{2\pi C_o (r_o + R_L)}$$

Parámetros de dispersión



$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

Coeficiente de reflexión del puerto 1 (Entrada)

$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

Coeficiente de transmisión del puerto 1 al 2 (Ganancia)

$$S_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

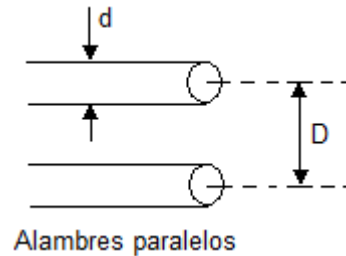
Coeficiente de transmisión del puerto 2 al 1 (Ganancia en inversa)

$$S_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

Coeficiente de reflexión del puerto 2 (Salida)

Líneas de transmisión

Impedancia característica



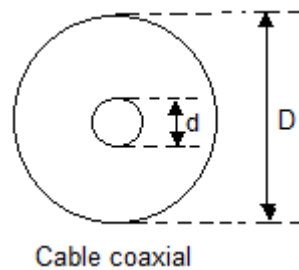
$$Z_0 = 276 \log \frac{2D}{d}$$

donde:

D = distancia entre conductores o diámetro exterior

d = diámetro del conductor o diámetro interior

Impedancia característica para cable coaxial:



$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \left(\frac{D}{d} \right) \approx 138 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \log \left(\frac{D}{d} \right)$$

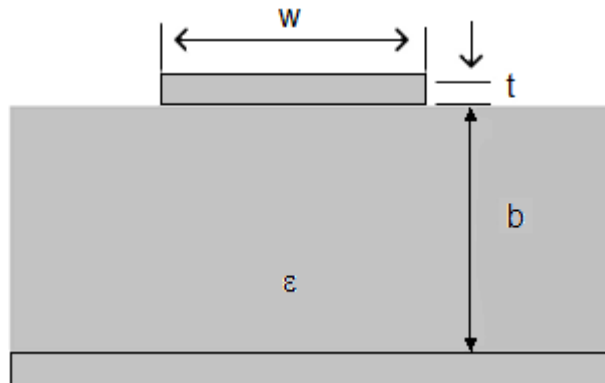
donde:

D = distancia entre conductores o diámetro exterior

d = diámetro del conductor o diámetro interior

μ_r y ϵ_r es la permeabilidad relativa y la permitividad relativa del material aislante, respectivamente.

Línea de transmisión de tipo microcinta



Si $t \ll W$

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln \left(\frac{8b}{W} + \frac{W}{4b} \right) & \text{Si } \frac{W}{b} < 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e} \left[W/b + 1.393 + 0.667 \ln(W/b + 1.444) \right]} & \text{Si } \frac{W}{b} > 1 \end{cases}$$

donde:

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12b/W}}$$

En otro caso:

$$Z_0 = \frac{87}{\sqrt{\epsilon + 1.41}} \ln \left(\frac{5.98b}{0.8W + t} \right)$$

ϵ_r = constante dieléctrica

W = ancho de la pista

t = espesor de la pista

b = distancia entre la pista al plano a tierra

Impedancia característica de líneas de microcinta paralelas

$$Z_0 = \frac{60}{\epsilon} \ln \left(\frac{4d}{0.67\pi W (0.8 + t/b)} \right)$$

Impedancia característica

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Constante de propagación

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

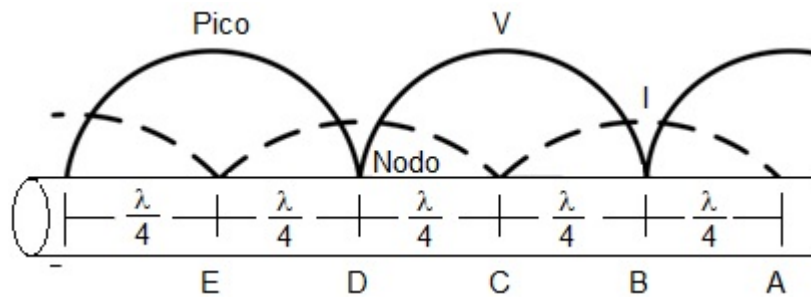
Velocidad de propagación

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Tiempo de retardo

$$t_d = \sqrt{LC}$$

Ondas estacionarias



Ondas estacionarias en una línea de transmisión en circuito abierto

Coeficiente de reflexión

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i}$$

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Si $V_{\max} = 1 + |\Gamma|$ y $V_{\min} = 1 - |\Gamma|$

entonces:

$$\Gamma = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max} + V_{\min}}$$

donde:

Γ = Coeficiente de reflexión

V_r = Voltaje reflejado

V_i = Voltaje incidente

Relación de onda estacionaria (SWR) y el coeficiente de reflexión (Γ)

$$SWR = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

y

$$\Gamma = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$$

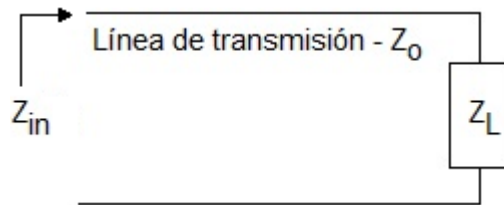
Si $Z_L \in \Re$ y $Z_L > Z_0$, entonces:

$$SWR = \frac{Z_L}{Z_0}$$

Si $Z_L \in \Re$ y $Z_L < Z_0$, entonces:

$$SWR = \frac{Z_0}{Z_L}$$

Impedancia de entrada (Z_{in})



$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta l)}$$

donde:

β = es el número angular de onda

l = es la longitud de la línea

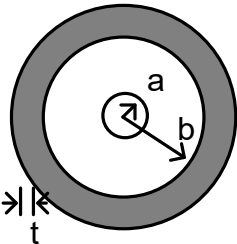
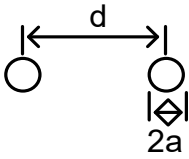
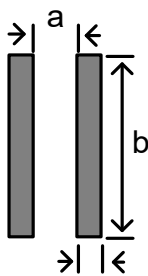
Para una línea de transmisión de $\lambda / 2$

$$Z_{in} = Z_L$$

Para una línea de transmisión de $\lambda / 4$

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

Tabla de parámetros distribuidos

		Coaxial	Bifilar	Doble cinta
				
	C (F/m)	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\epsilon}{\ln(d/a)}$	$\frac{\epsilon b}{a}$
	L (Hy/m)	$\frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi} \ln(d/a)$	$\frac{\mu a}{b}$
	G ($\Omega \text{ M}$) ⁻¹	$\frac{2\pi\sigma_{cq}}{\ln(b/a)}$	$\frac{2\pi\sigma_{cq}}{\ln(d/a)}$	$\frac{\sigma_{cq} b}{a}$
Alta frecuencia	R (Ω/m)	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2R_s}{b}$
	Z ₀ (Ω)	$\frac{\eta}{2\pi} \ln(b/a)$	$\frac{\eta}{\pi} \ln(d/a)$	$\frac{\eta a}{b}$
Baja frecuencia	R (Ω/m)	$\frac{p}{\pi} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2bt} \right)$	$\frac{2p}{\pi a^2}$	$\frac{2p}{bt}$
	Z ₀ (Ω)	$\sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega C}}$		

Antenas

Ganancia directiva

$$G_{(dB)} = \frac{P_{\text{antena de prueba}}}{P_{\text{antena de referencia}}} [dB]$$

Resistencia de radiación

$$R_r = \frac{P_{\text{radiada}}}{I_{\text{entrada}}^2} [\Omega]$$

$$R_r = 790 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 [\Omega]$$

Ancho de banda de la antena

$$f_m = \sqrt{f_L \cdot f_H}$$

Longitud efectiva

$$l_e = \frac{292}{f}$$

Área efectiva

$$A_{ef} = \frac{W_r}{P_i}$$

Densidad de potencia radiada

$$P(\theta, \phi) = \text{Re}(E \times H^*)$$

Impedancia característica del medio

$$\frac{E}{H} = \eta$$

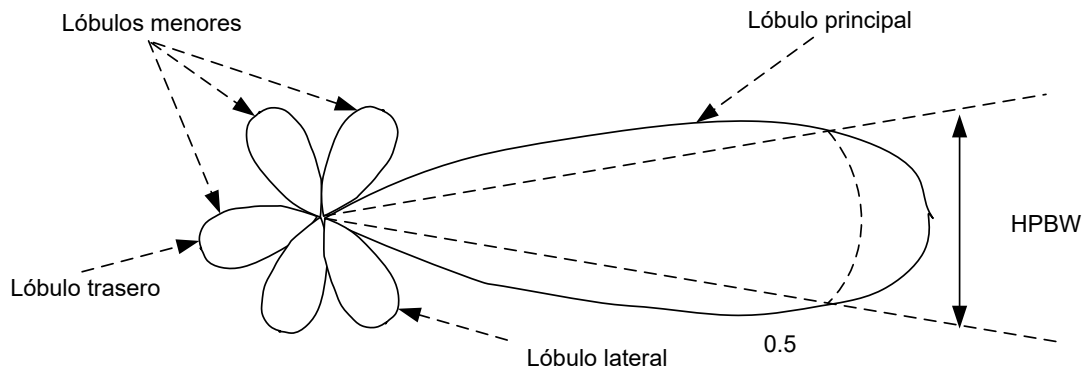
Potencia total radiada

$$W_r = \iint P(\theta, \phi) \cdot ds$$

Directividad

$$D = \frac{P_{\max}}{\frac{W_r}{4\pi r^2}}$$

Lóbulo



Ancho del haz principal

$$BW_n \approx 2.25BW_{-3dB}$$

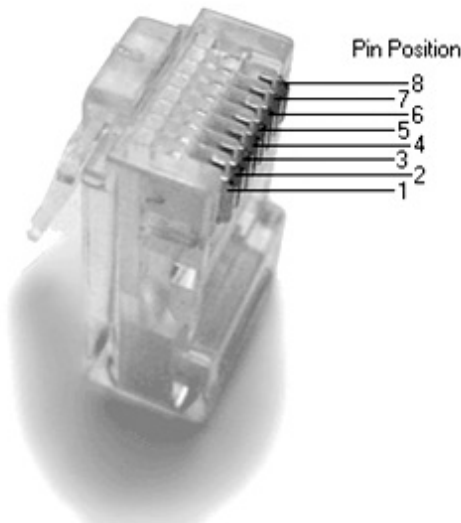
Intensidad del campo

$$E = \frac{\sqrt{30D_t \cdot P_t}}{d}$$

Conectores

RJ45

Cable cruzado T568A			Cable cruzado T568B		
TX+					
1 Transceive data +	Blanco - Verde	Blanco - Naranja	Blanco - Naranja	Blanco - Verde	
TX-					
2 Transceive data -	Verde	Naranja	Naranja	Verde	
RX+					
3 Receive data +	Blanco - Naranja	Blanco - Verde	Blanco - Verde	Blanco - Naranja	
BDD+					
4 Bi-directional data +	Azul	Azul	Azul	Blanco - Marrón	
BDD-					
5 Bi-directional data -	Blanco - Azul	Blanco - Azul	Blanco - Azul	Blanco - Marrón	
RX-					
6 Receive data -	Naranja	Verde	Verde	Naranja	
BDD+					
7 Bi-directional data +	Blanco - Marrón	Blanco - Marrón	Blanco - Marrón	Blanco - Azul	
BDD-					
8 Bi-directional data -	Marrón	Marrón	Marrón	Blanco - Azul	

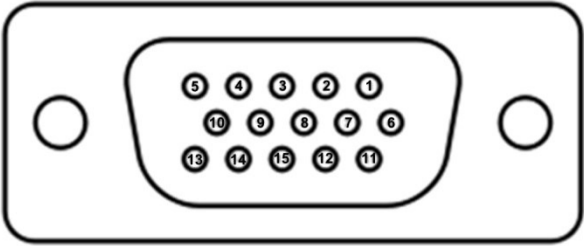


Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

RJ11

Posición	RJ11	RJ10	RJ14	Par	T/R ±	Colores cat 5e/6	Colores	Colores antiguos	Colores alemanes
1	1			3	T +	 blanco/verde	 blanco/verde	 naranja	 rosa
2	2	1		2	T +	 blanco/naranja	 blanco/naranja	 negro	 verde
3	3	2	1	1	R -	 azul	 azul/blanco	 rojo	 blanco
4	4	3	2	1	T +	 blanco/azul	 blanco/azul	 verde	 marrón
5	5	4		2	R -	 naranja	 naranja/blanco	 amarillo	 amarillo
6	6			3	R -	 verde	 verde/blanco	 azul	 gris

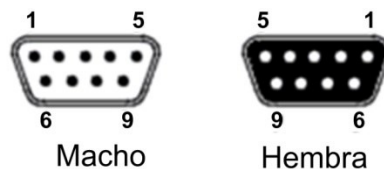
VGA

Pines		
		
Un conector DE15 hembra.		
Pin 1	RED	Canal rojo
Pin 2	GREEN	Canal verde
Pin 3	BLUE	Canal azul
Pin 4	N/C	Sin contacto
Pin 5	GND	Tierra (HSync)
Pin 6	RED_RTN	Vuelta rojo
Pin 7	GREEN_RTN	Vuelta verde
Pin 8	BLUE_RTN	Vuelta azul
Pin 9	+5 V	+5 V (Corriente continua)
Pin 10	GND	tierra (Sincr. Vert, corriente continua)
Pin 11	N/C	Sin contacto
Pin 12	SDA	I ² C datos
Pin 13	HSync	Sincronización horizontal
Pin 14	VSync	Sincronización vertical
Pin 15	SCL	I ² Velocidad reloj

USB

Patillaje	
Standard A USB Standard B The standard USB A plug (left) and B plug (right)	
Pin 1	V _{CC} (+5 V)
Pin 2	Data-
Pin 3	Data+
Pin 4	Ground

DB9



Se debe tener en cuenta que existen adaptadores DB9-DB25 para convertir fácilmente un enchufe DB9 en uno DB25 y viceversa.

Pines

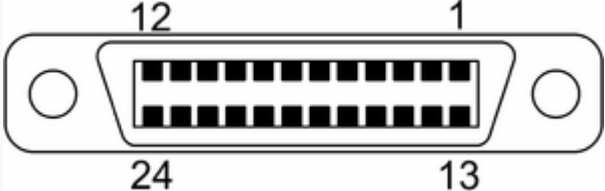
Número de clavija	Nombre
1	CD: Detector de transmisión
2	RXD: Recibir datos
3	TXD: Transmitir datos
4	DTR: Terminal de datos lista
5	GND: Señal de tierra
6	DSR: Ajuste de datos listo
7	RTS: Permiso para transmitir
8	CTS: Listo para enviar
9	RI: Indicador de llamada

DB-25

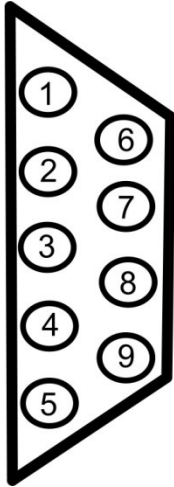
Asignaciones de patas al conector D-25 para impresoras: Este conector trabaja para el puerto paralelo.

Pata	Señal	E/S	Definición
1	STB#	E/S	Estrobo
2	PD0	E/S	Bit 0 de datos de impresora
3	PD1	E/S	Bit 1 de datos de impresora
4	PD2	E/S	Bit 2 de datos de impresora
5	PD3	E/S	Bit 3 de datos de impresora
6	PD4	E/S	Bit 4 de datos de impresora
7	PD5	E/S	Bit 5 de datos de impresora
8	PD6	E/S	Bit 6 de datos de impresora
9	PD7	E/S	Bit 7 de datos de impresora
10	ACK#	E	Reconocimiento
11	BUSY	E	Ocupado
12	PE	E	Fin del papel
13	SLCT	E	Seleccionar
14	AFD#	S	Avance automático
15	ERR#	E	Error
16	INIT#	S	Iniciar impresora
17	SLIN#	S	Seleccionar
18–25	GND	N/D	Tierra de señal

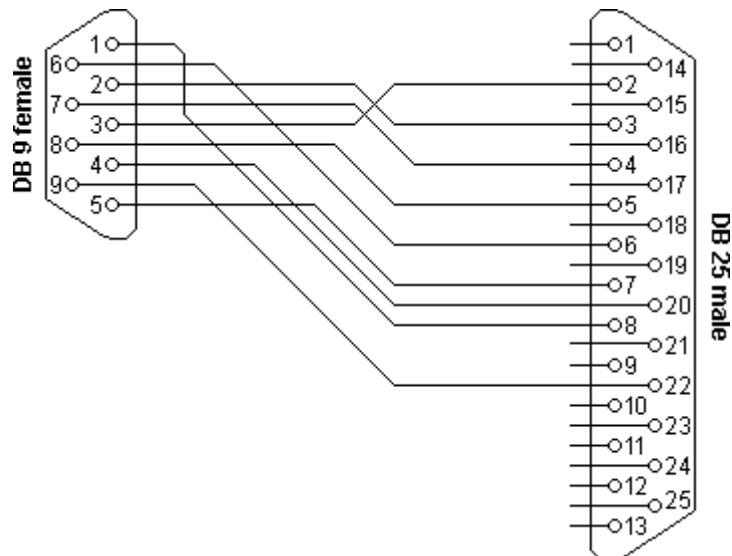
IEEE.488

Terminales		
 Conector hembra IEEE-488		
Pin 1	DIO1	Entrada de dato / bit de salida
Pin 2	DIO2	Entrada de dato / bit de salida.
Pin 3	DIO3	Entrada de dato / bit de salida
Pin 4	DIO4	Entrada de dato / bit de salida
Pin 5	EOI	Final o identificación
Pin 6	DAV	Validación de datos
Pin 7	NRFD	No está listo para recibir dato
Pin 8	NDAC	No se acepta el dato
Pin 9	IFC	Interfaz limpia
Pin 10	SRQ	Servicio
Pin 11	ATN	Atención de datos
Pin 12	SHIELD	
Pin 13	DIO5	Entrada de dato / bit de salida
Pin 14	DIO6	Entrada de dato / bit de salida
Pin 15	DIO7	Entrada de dato / bit de salida
Pin 16	DIO8	Entrada de dato / bit de salida
Pin 17	REN	Remoto activado
Pin 18	GND	(emparejado con DAV)
Pin 19	GND	(emparejado con NRFD)
Pin 20	GND	(emparejado con NDAC)
Pin 21	GND	(emparejado con IFC)
Pin 22	GND	(emparejado con SRQ)

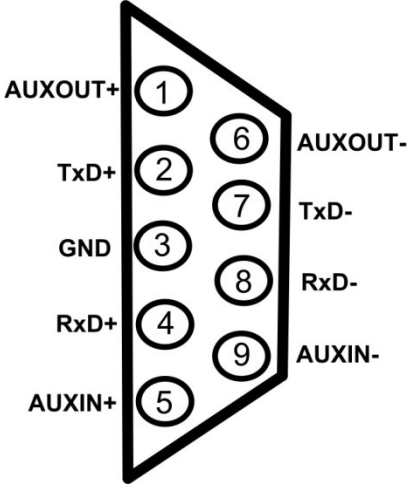
RS-232 DB9

	PIN 1: PIN 2: PIN 3: PIN 4: PIN 5: PIN 6: PIN 7: PIN 8: PIN 9:	Detector de acarreo Recibe dato Transmite dato Terminal de dato lista Tierra Dato listo Requisita para mandar Limpia para enviar Indicador
---	---	---

Convertidor RS-232 a DB-25



RS – 422/485 DB – 9

		PIN 1: Salida auxiliar + PIN 2: Dato de salida + PIN 3: Tierra PIN 4: Entrada de dato + PIN 5: Salida auxiliar + PIN 6: Salida auxiliar – PIN 7: Salida de dato – PIN 8: Entrada de dato – PIN 9: Entrada auxiliar –
---	--	---

Formulario general

Matemáticas

Álgebra

Propiedades de desigualdades

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Si } x < y & \Rightarrow x + z < y + z \\ \text{Si } x < y; \quad z > 0 & \Rightarrow xz < yz \\ \text{Si } x < y; \quad z < 0 & \Rightarrow xz > yz \\ \text{Si } x < y; \quad y < z & \Rightarrow x < z \end{array} \right\} \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Teorema del residuo

$\forall f(x); g(x) \neq 0$, existen $q(x); r(x)$; f, g, q, r polinomios tales que: $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, con $gr(r) < gr(g)$ o $r(x) = 0$

Teorema de la raíz racional

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ a_n &\neq 0 \\ a_0 &\neq 0 \end{aligned}$$

Las raíces racionales de f son de la forma $\frac{p}{q}$ donde p es factor de a_0 y q de a_n .

Para matrices A y B

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad A \text{ y } B \text{ no singulares}$$

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr } A + \text{tr } B$$

$$\text{tr}(aA) = a(\text{tr } A)$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)A$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad A \text{ no singular}$$

donde:

tr A= traza de A

A^T= transpuesta de A

Fórmulas para potencia y raíces

$p \cdot a^n \pm q \cdot a^n = (p \pm q) \cdot a^n$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{a^n}{b^n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$p \cdot \sqrt[n]{a} \pm q \cdot \sqrt[n]{a} = (p \pm q) \cdot \sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a^{m \cdot x}} = \sqrt[n]{a^m}^x$
$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \quad *$	$\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}$
*No es válida en algunos casos por ejemplo: $\sqrt{(-2)^2} = +2, (\sqrt{-2})^2 = -2$	

Nota: Los exponentes para potencias y raíces deben ser escalares

Transformación de expresiones algebraicas usuales

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 + px + q = 0 \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
$(a - b + c)^2 = a^2 - 2ab + 2ac + b^2 - 2bc + c^2$	
$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \dots$	
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$	

Logaritmos

$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$	$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
$\log x^n = n \log x$	$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x$
$\log_a n = n \log a$	$\log_a a = 1$
$\log 1 = 0$	

Binomio de Newton

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots$$

Donde n tiene que ser un número entero

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} 1$$

Teorema del binomio (de Newton)

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

Teorema binomial

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Permutaciones

Número de permutaciones de n elementos

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots$$

Combinaciones y ordenaciones

Número de combinaciones sin repetición	Número de combinaciones con repetición
$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	${}^r C_k^n = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$ r con repetición
Número de ordenaciones sin repetición	Número de ordenaciones con repetición
$O_k^n = C_k^n \cdot P_k = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$	${}^r O_k^n = n^k$

donde:

C = número de combinaciones posibles

N = número de elementos dados

K = número de elementos seleccionados de entre n elementos dados

O = número de ordenaciones posibles

Serie binómica o binomial

$$f(x) = (1 \pm x)^\alpha = 1 \pm \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots$$

α es un número cualquiera, positivo o negativo, entero o fraccionario

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Serie de Taylor (serie de McLaurin)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Forma de McLaurin, cuando $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Expansión de Taylor

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad -\infty < x < \infty$$

Determinantes por la regla de Cramer para la solución de ecuaciones simultáneas

Determinantes de segundo orden

Para el sistema de dos ecuaciones:

$$A_1x + B_1y = C_1$$

$$A_2x + B_2y = C_2$$

Se resuelve mediante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = (A_1)(B_2) - (B_1)(A_2)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_2 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(C_1)(B_2) - (B_1)(C_2)}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_2 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(A_1)(C_2) - (C_1)(B_2)}{\Delta}$$

Para el sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\A_3x + B_3y + C_3z &= D_3\end{aligned}$$

Se resuelve mediante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 - A_1B_3C_2 - A_2B_1C_3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{D_1B_2C_3 + D_2B_3C_1 + D_3B_1C_2 - D_3B_2C_1 - D_1B_3C_2 - D_2B_1C_3}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{A_1D_2C_3 + A_2D_3C_1 + A_3D_1C_2 - A_3D_2C_1 - A_1D_3C_2 - A_2D_1C_3}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{A_1B_2D_3 + A_2B_3D_1 + A_3B_1D_2 - A_3B_2D_1 - A_1B_3D_2 - A_2B_1D_3}{\Delta}$$

Álgebra lineal

Si $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ es base de un espacio V ; $\bar{x} \in V$

y $\bar{x} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$; entonces, el vector de coordenadas de $\bar{x}$ respecto a B es:

$$(\bar{x})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$$

Si $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V(C)$ espacio vectorial, entonces $f(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u} | \bar{v})$ es producto interno en V si:

- 1) $(\bar{u} | \bar{v}) = \overline{(\bar{v} | \bar{u})}$
- 2) $(\bar{u} | \bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} | \bar{v}) + (\bar{u} | \bar{w})$
- 3) $(\alpha \bar{u} | \bar{v}) = \alpha (\bar{u} | \bar{v})$
- 4) $(\bar{u} | \bar{u}) > 0$ si $\bar{u} \neq \bar{0}$

$$\|\bar{v}\| = (\bar{v} | \bar{v})^{1/2} \text{ norma de } \bar{v}$$

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{v} - \bar{u}\| \text{ distancia de } \bar{u} \text{ a } \bar{v}$$

$$\cos \theta = \frac{(\bar{u} \bullet \bar{v})}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} \text{ coseno del ángulo entre } \bar{u} \text{ y } \bar{v}$$

Si $B = \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n\}$ es base ortogonal de un espacio V ; $\bar{v} \in V$ y $(\bar{v})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$

$$\text{entonces } \alpha_i = \frac{(\bar{v} | \bar{g}_i)}{(\bar{g}_i | \bar{g}_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Si $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m\}$ es base ortonormal de un subespacio W del espacio V y $\bar{v} \in V$; entonces,

$$\text{la proyección de } \bar{v} \text{ sobre } W \text{ es: } \sum_{i=1}^m (\bar{v} | \bar{e}_i) \bar{e}_i$$

Para la transformación lineal $T: V \rightarrow W$

$$\begin{cases} T(V) = \{T(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V\} & \text{recorrido de } V \\ N(T) = \{\bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = \bar{0}\} & \text{núcleo de } T \\ \dim V = \dim T(V) + \dim N(T) \end{cases}$$

Para $T: V \rightarrow W$

$A = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ base de V y B base de W la matriz asociada a T , $M_B^A(T)$ tiene por columnas a:

$$[T(\bar{v}_1)]_B, [T(\bar{v}_2)]_B, \dots, [T(\bar{v}_n)]_B$$

para $T: V \rightarrow V$, $\bar{v} \in V$ es vector característico de T si:

$$T(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \text{ con } \lambda \neq 0 \text{ y } \bar{v} \neq \bar{0}$$

Cálculo diferencial

Relación de cambio: Derivada

Pendiente en un punto. Relación (o intensidad) de cambio

Pendiente de una curva

En una curva $y = f(x)$, la pendiente m varía en cada punto. La pendiente de la curva en un punto P es también la tangente en dicho punto:

$$m = \tan \alpha = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$

Relación media de cambio (cociente incremental)

La intensidad media de variación de la función $y = f(x)$ es la relación de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondientes al segmento de curva PP_1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivada (cociente diferencial)

Cuando Δx tiende a cero, el punto P_1 tiende al punto P, y la secante PP_1 , a la tangente a la curva en P. De manera que la relación de incrementos se convierte en la relación de diferenciales, que es la derivada (o Intensidad de cambio) de la función en P:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Interpretación geométrica de la derivada

Curvas de derivadas sucesivas

Si para cada x de una curva se lleva la pendiente (o derivada) correspondiente y' como ordenada, se obtendrá la curva de $y' = f'(x)$, o de la primera derivada de la curva dada $y = f(x)$. Si se deriva la curva $y' = f'(x)$ se obtendrá $y'' = f''(x)$ o la segunda derivada de la curva dada $y = f(x)$, etc.

Radio de curvatura ρ en un punto dado x .

$$\rho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}$$

Coordenadas del centro de curvatura C correspondiente a un radio ρ
 y''

$$a = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y'$$

$$b = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

Determinación de los valores máximos, mínimos y puntos de inflexión

Valores máximos y mínimos

Hágase $y' = 0$ y sea a el valor obtenido de x . Sustitúyase ahora $x = a$ en y''

Si $y''(a) > 0$ habrá un mínimo en $x = a$

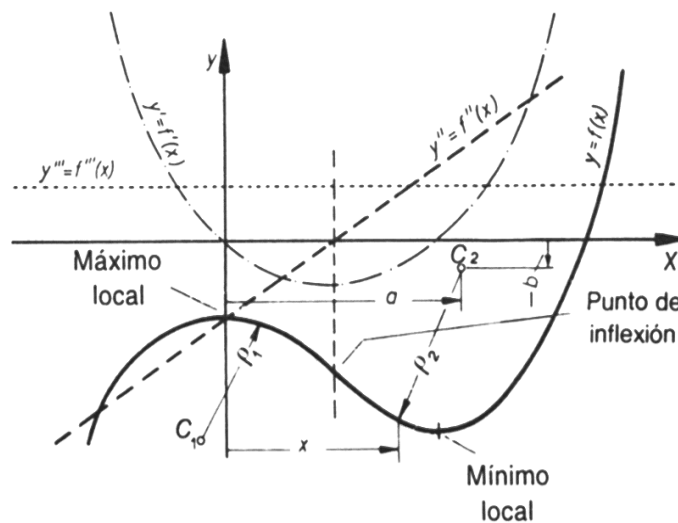
Si $y''(a) < 0$ habrá un máximo en $x = a$

Punto de inflexión

Hágase $y'' = 0$ y sea a el valor obtenido de x . Sustitúyase ahora $x = a$ en y'''

Si $y'''(a) \neq 0$ habrá un punto de inflexión en $x = a$

Forma de la curva $y = f(x)$



Crecimiento y decrecimiento

- $y'(x) > 0$ $y(x)$ crece si aumenta x
 $y'(x) < 0$ $y(x)$ decrece si aumenta x
 $y'(x) = 0$ $y(x)$ tiene en x una tangente paralela al eje x

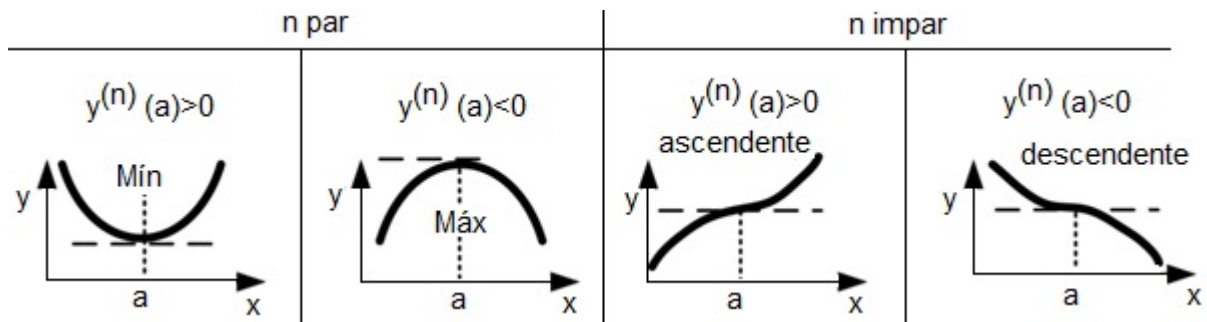
Curvatura

- $y''(x) > 0$ $y(x)$ será cóncava hacia arriba
 $y''(x) < 0$ $y(x)$ será cóncava hacia abajo
 $y''(x) = 0$ con cambio de signo $y(x)$ tendrá en x un punto de inflexión
 sin cambio de signo $y(x)$ tendrá en x un máximo o un mínimo

Otros casos

Si para $x = a$

$y'(a) = y''(a) = y'''(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0$, pero $y^{(n)} \neq 0$, pueden presentarse los cuatro casos siguientes:



Tablas de derivadas

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(cx) = c$
$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \dots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \dots$
$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(uvw) = uv \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$
$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$
$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx}$ (Regla de la cadena)	

Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

$\frac{d}{dx}u^v = \frac{d}{dx}e^{v \ln u} = e^{v \ln u} \frac{d}{dx}[v \ln u] = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$	
$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx} \quad a > 0, \quad a \neq 1$	$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{d}{dx} \log_e u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$

Derivadas de las funciones trigonométricas y de las trigonométricas inversas

$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{csc} u = -\operatorname{csc} u \cot u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ $[0 < \cos^{-1} u < \pi]$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ $[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{sen}^{-1} u < \frac{\pi}{2}]$
$\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ $[-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} u < \frac{\pi}{2}]$	$\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$ $[0 < \cot^{-1} u < \pi]$

$\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\begin{bmatrix} +si & 0 < \sec^{-1} u < \frac{\pi}{2} \\ -si & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} u < \pi \end{bmatrix}$	$\frac{d}{dx} \csc^{-1} u = \frac{-1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\mp}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\begin{bmatrix} -si & 0 < \csc^{-1} u < \frac{\pi}{2} \\ +si & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} u < 0 \end{bmatrix}$
--	--

Derivadas de las funciones hiperbólicas y de las hiperbólicas recíprocas

$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \coth u = -\csc h^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{cosech} u = -\operatorname{cosech} u \coth u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{senh}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad [-1 < u < 1]$
$\frac{d}{dx} \operatorname{cosech}^{-1} u = \frac{-1}{ u \sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx},$ $[- si \ u > 0, + si \ u < 0]$	$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} u = \frac{\pm 1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\begin{bmatrix} + si \ \cosh^{-1} u > 0, & u > 1 \\ - si \ \cosh^{-1} u < 0, & u < 1 \end{bmatrix}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} u = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\begin{bmatrix} - si \ \operatorname{sech}^{-1} u > 0, & 0 < u < 1 \\ + si \ \operatorname{sech}^{-1} u < 0, & 0 < u < 1 \end{bmatrix}$	$\frac{d}{dx} \coth^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx},$ $[u > 1 \text{ ó } u < -1]$

Cálculo integral

Significado de la integración

Por integración se entiende el encontrar una función $F(x)$ a partir de una función dada $y = f(x)$ de manera que la derivada $F'(x)$ sea igual a la original $f(x)$. Por lo tanto,

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

La integral indefinida

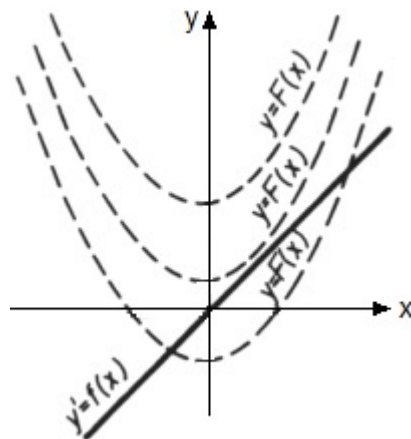
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

C es una constante indeterminada que desaparece al derivar, ya que la derivada de una constante es igual a cero.

Significado geométrico de la integral indefinida

Como muestra la figura, hay una infinidad de curvas $y = F(x)$ con pendiente o derivada $y' = f(x)$. Todas las curvas $y = F(x)$ son iguales pero desplazadas paralelamente y en la dirección del eje y . La constante C fija una curva determinada. Si la curva debe pasar por el punto x_0, y_0 se tendrá:

$$C = y_0 - F(x_0)$$



La integral definida

La integral definida tiene la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

En la integral resultante se sustituye primero el límite superior y luego el inferior, y se resta el segundo resultado del primero. Desaparece así la constante C .

Reglas de integración

Formas fundamentales

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int e^u \, du = e^u + C$$

$$\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Formas trigonométricas

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \tan u \, du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$\int \cot u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

Formas cuadráticas

$$\int \sqrt{a^2 + u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int u \sqrt{a + bu} \, du = \frac{2}{15b^2} (3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} \, du = \sqrt{a^2 + u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 + u^2}} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$\int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2 u} \sqrt{a^2 - u^2} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left(a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln |a + bu| \right) + C$$

$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u^n \sqrt{a + bu}} = -\frac{\sqrt{a + bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a + bu}}$$

$$\int \frac{udu}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a) \sqrt{a + bu}$$

$$\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u} \right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2 - u^2} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{u^n du}{\sqrt{a + bu}} = \frac{2u^n \sqrt{a + bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a + bu}}$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 - a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{udu}{a + bu} = \frac{1}{b^2} (a + bu - a \ln |a + bu|) + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$$

$$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{a + bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a + bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bu} + \sqrt{a}} \right| + C, \text{ si } a > 0$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a + bu}{-a}} + C, \text{ si } a < 0$$

$$\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

$$\int \frac{udu}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b} \ln|a+bu| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

$$\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

$$\int (a^2 - u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8} (2u^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{8} (a^2 + 2u^2) \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{8} \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3} [(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2 \ln|a+bu|] + C$$

$$\int u^2 \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 - a^2) \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$$

Otras formas trigonométricas

$$\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \sin^2 u du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$\int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du$$

$$\int \cos^2 u du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$$

$$\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$$

$$\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du$$

$$\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$$

$$\int \cot^n u du = \frac{-1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du$$

$$\int \sin^3 u du = -\frac{1}{3} (2 + \sin^2 u) \cos u + C$$

$$\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$$

$$\int \cos^3 u du = \frac{1}{3} (2 + \cos^2 u) \sin u + C$$

$$\int \csc^n u du = \frac{1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du$$

$$\int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln|\cos u| + C$$

$$\int \sin au \sin bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int \cot^3 u du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln|\sin u| + C$$

$$\int \cos au \cos bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int u^n \cos u du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u du$$

$$\int \sin au \cos bu du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n u \cos^m u \, du \\ = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u \, du \\ = -\frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u \, du \end{aligned}$$

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen} u \, du = u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$$

$$\int u \cos^{-1} u \, du = \frac{2u^2 - 1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

$$\int u \tan^{-1} u \, du = \frac{u^2 + 1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int \operatorname{sen}^{-1} u \, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$\int u^n \cos^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$$

$$\int u^n \tan^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1+u^2}} \right], \quad n \neq -1$$

$$\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$$

Formas exponenciales y logarítmicas

$$\int u e^{au} \, du = \frac{1}{a^2} (au - 1) e^{au} + C$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u + C$$

$$\int u^n e^{au} \, du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} \, du$$

$$\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$$

$$\int e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$$

$$\int \frac{1}{u \ln u} \, du = \ln |\ln u| + C$$

$$\int e^{au} \cos bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$$

Formas hiperbólicas

$$\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \ln \left| \tan \frac{1}{2} u \right| + C$$

$$\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \tanh u \, du = \ln \cosh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \coth u \, du = \ln |\operatorname{senh} u| + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1} |\operatorname{senh} u| + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

Otras formas cuadráticas

$$\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2} du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int u\sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u - au - 3a^2}{6} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2} \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

Regla de Simpson

Para curvas hasta de tercer grado

$$A_i = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Para curvas de grado mayor que el tercero

$$A = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})]$$

Integrales múltiples

$$\int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy dx = \int_{x=a}^b \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy \right\} dx$$

donde $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$ son las ecuaciones de las curvas HPG y PGQ respectivamente, mientras que a y b son las abscisas de los puntos P y Q. Esta integral también se puede escribir así:

$$\int_{y=c}^d \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx dy = \int_{y=c}^d \left\{ \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx \right\} dy$$

donde $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ son las ecuaciones de las curvas HPG y PGQ, respectivamente, mientras que c y d son las ordenadas de H y G.

Estas son las llamadas integrales dobles o integrales de área. Los anteriores conceptos se pueden ampliar para considerar integrales triples o de volumen así como integrales múltiples en más de tres dimensiones.

$$s = s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Es la longitud de curva correspondiente al intervalo paramétrico $[a, t]$.

	En parámetro arbitrario:	En parámetro s:
Vector tangente unitario	$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\ \vec{r}'(t)\ }$	$\vec{t}(s) = \frac{\vec{r}'(s)}{\ \vec{r}'(s)\ }$
Vector normal principal	$\vec{n}(t) = \frac{\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)}{\ \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)\ }$	$\vec{n}(s) = \frac{\vec{r}''(s) \times \vec{r}'(s)}{\ \vec{r}''(s) \times \vec{r}'(s)\ }$
Vector binormal	$\vec{b}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }$	$\vec{b}(s) = \frac{\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)}{\ \vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)\ }$

Los vectores unitarios $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ forman una triada positiva ($\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}, \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}, \vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$)

Recta tangente en t_0

Ecuación vectorial

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0)$$

Ecuación paramétrica

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}$$

Plano oscilador ($\vec{t}, \vec{n}$) en t_0

Ecuación vectorial

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0)) \cdot (\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) = 0$$

Ecuación paramétrica

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0$$

Curvatura y torsión

$$\kappa = \frac{y'''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \quad \text{y} \quad \tau(t) = \frac{\vec{r}'(t) \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))}{\|\vec{r}'(t)\|^2 \|\vec{r}''(t)\|}$$

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\|$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \vec{T} &= \kappa \vec{N} & \frac{d}{ds} \vec{N} &= \tau \vec{B} - \kappa \vec{T} \\ \frac{d}{ds} \vec{B} &= -\tau \vec{N} \end{aligned}$$

Plano normal

Ecuación vectorial

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$$

Ecuación paramétrica

$$x'_0(x - x_0) + y'_0(y - y_0) + z'_0(z - z_0) = 0$$

Plano rectificante ($\vec{t}, \vec{b}$) en t_0

Ecuación vectorial

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{n}(t_0) = 0$$

Ecuación paramétrica

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ y'_0 z''_0 - y''_0 z'_0 & z'_0 x''_0 - z''_0 x'_0 & x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0 \end{vmatrix} = 0$$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

$$a_T = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$$a_N = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}$$

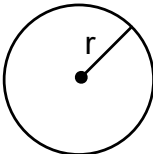
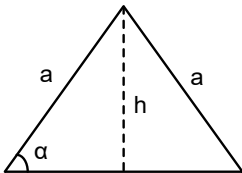
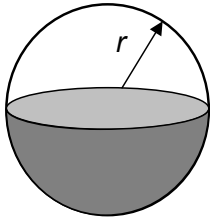
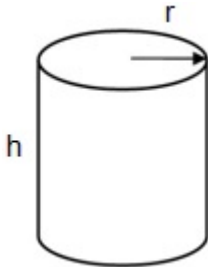
Propiedades de la divergencia

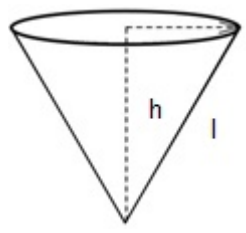
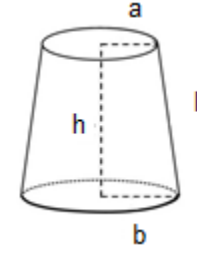
$$i) \operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div}(\vec{F}) + \operatorname{div}(\vec{G})$$

$$ii) \operatorname{div}(\phi \vec{F}) = \phi \operatorname{div}(\vec{F}) + (\operatorname{grad} \phi) \cdot \vec{F}$$

$$iii) \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot [\operatorname{rot}(\vec{F})] - \vec{F} \cdot [\operatorname{rot}(\vec{G})]$$

Geometría

Áreas	
Círculo $A = \pi r^2$	
Trapezio $A = \frac{B+b}{2} h$	
Triángulo $A = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{bh}{2}$	
Volúmenes	
Prismas $V = S_B h$ donde S_B = área de la base	
Pirámides $V = \frac{S_B h}{3}$ donde S_B = área de la base	
Esfera $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ $A = 4 \pi r^2$	
Cilindro $V = \pi r^2 h$ $A = 2 \pi r h$	

Cono $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r l$	 A diagram of a cone. A vertical dashed line from the center of the circular base to the apex is labeled 'h'. A solid line along the side of the cone from the base to the apex is labeled 'l'.
$V = \frac{1}{3} \pi h (a^2 + ab + b^2)$ $A = \begin{cases} \pi(a+b) \sqrt{h^2 + (b-a)^2} \\ \pi(a+b)l \end{cases}$	 A diagram of a frustum of a cone. The top circular face has radius 'a' and the bottom circular face has radius 'b'. A vertical dashed line between the centers of the two faces is labeled 'h'. A solid line along the side of the frustum is labeled 'l'.

Geometría analítica plana

Distancia entre dos puntos

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Pendiente de una recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación de una recta

$$y - y_1 = m(x - x_1); \quad Ax + By + C = 0$$

Ángulo entre rectas

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2; \quad Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Parábola

Eje vertical	$(x - h)^2 = 4p(y - k);$	$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
--------------	--------------------------	--------------------------

Eje horizontal	$(y - k)^2 = 4p(x - h);$	$By^2 + Dx + Ey + F = 0$
	$LR = 4p \quad e = 1$	

Elipse

Eje focal horizontal	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$; a > b$
----------------------	---	-----------

Eje focal vertical	$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$	$; a > b$
--------------------	---	-----------

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad LR = \frac{2b^2}{a}; \quad e = \frac{c}{a} < 1$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad AC > 0$$

Hipérbola

Eje focal horizontal $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Eje focal vertical $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad LR = \frac{2b^2}{a}; \quad e = \frac{c}{a} > 1$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad AC < 0$$

Geometría analítica del espacio

Considerando $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Vector que une P_1 y P_2

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1) \rangle = (l, m, n)$$

Distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

Recta que pasa por dos puntos

Forma paramétrica

$$x = x_1 + l t$$

$$y = y_1 + m t$$

$$z = z_1 + n t$$

Forma simétrica

$$t = \frac{x - x_1}{l}$$

$$t = \frac{y - y_1}{m}$$

$$t = \frac{z - z_1}{n}$$

Cosenos directores

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d} = \frac{l}{d}$$

$$\cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d} = \frac{m}{d}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d} = \frac{n}{d}$$

donde α , β , γ denotan los ángulos que forman la línea que une los puntos P_1 y P_2 con la parte positiva de los ejes x , y , z , respectivamente.

Ecuación del plano

- Que pasa por un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y tiene vector normal $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$:

$$a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) = 0$$

-Forma general:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

o

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

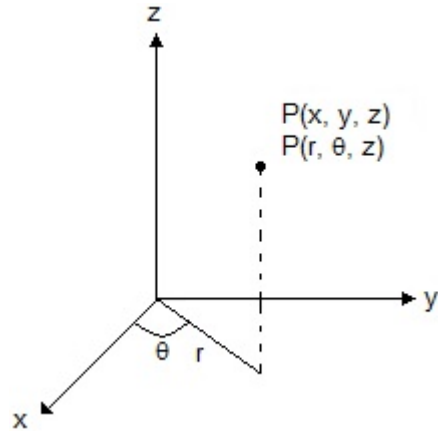
Distancia del punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

en la cual el signo debe escogerse de tal manera que la distancia no resulte negativa.

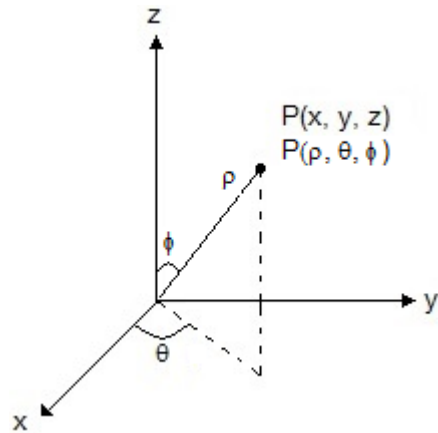
Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$



Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$



Definiciones geométricas importantes

Ángulo entre dos rectas en el plano	$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$
Producto escalar para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que pertenecen a $\mathcal{R}^3$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Producto vectorial	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
Producto mixto	$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
Ángulo entre dos vectores	$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \vec{b} }; \quad \text{sen} \theta = \frac{ \vec{a} \times \vec{b} }{ \vec{a} \vec{b} }$
Ecuación vectorial de la recta	$\vec{p} = \vec{p}_o + t\vec{u}$
Ecuaciones paramétricas de la recta	$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \quad \vec{u} = (a, b, c)$
Ecuaciones cartesianas de la recta, en forma simétrica	$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$ $\vec{u} = (a, b, c)$
Distancia de un punto Q a una recta	$d = \frac{ \overrightarrow{P_o Q} \times \vec{u} }{ \vec{u} }$
Distancia entre dos rectas	$d = \frac{ \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) }{ \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 }$
Ecuación vectorial de un plano	$\vec{p} = \vec{p}_o + r\vec{u} + s\vec{v}$
Ecuaciones paramétricas de un plano	$\begin{cases} x = x_o + ru_x + sv_x \\ y = y_o + ru_y + sv_y \\ z = z_o + ru_z + sv_z \end{cases}$
Ecuación cartesiana de un plano en forma general	$Ax + By + Cz + D = 0$ $\vec{N} = (A, B, C)$
Ecuación normal de un plano	$\overrightarrow{PoP} \cdot \vec{N} = 0; \quad \vec{N} = (A, B, C)$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Distancia de un punto Q a un plano	$d = \frac{ \overrightarrow{PoQ} \cdot \overrightarrow{N} }{ \overrightarrow{N} }$
Ángulo entre una recta y un plano	$\text{sen}\alpha = \frac{ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{N} }{ \overrightarrow{u} \overrightarrow{N} }$

Trigonometría

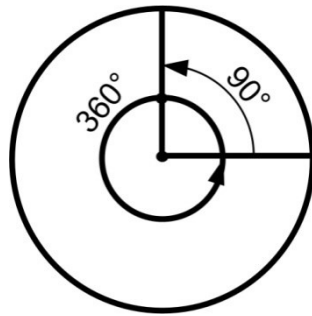
Medida de ángulos planos

Representación

La medida de un ángulo puede expresarse en unidades comunes (grados) o en unidades de arco (radianes). Se representa a veces, respectivamente, por α y $\hat{\alpha}$.

Unidades comunes (sexagesimales): grado ($^{\circ}$), minuto ($'$), segundo ($''$).

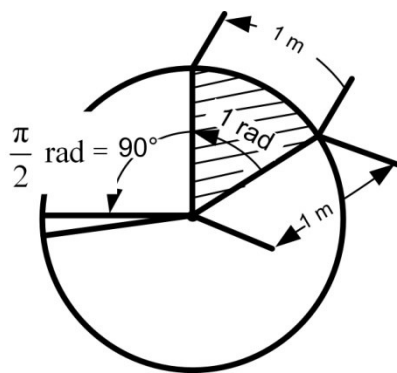
$$1^{\circ} = 60'; 1' = 60''$$



Unidad de arco

1 radián (rad) es el ángulo central de una circunferencia de radio unitario que intercepta un arco también unitario. Por lo tanto:

$$1 \text{ rad} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1(\text{número adimensional})$$



Con frecuencia no se indica específicamente la unidad, como en la siguiente tabla.

α	0°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
$\hat{\alpha}$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
	0	0.52	0.78	1.05	1.31	1.57	3.14	4.71	6.28

Equivalencias

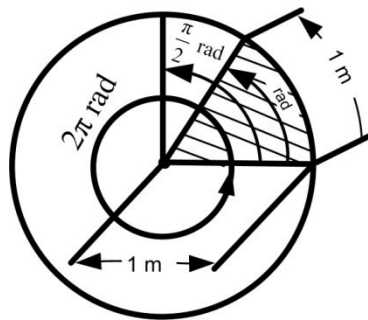
Por definición:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.2967^\circ$$

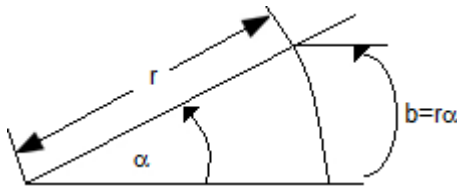
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.017453 \text{ rad}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \alpha = \frac{\alpha}{57.2967}$$

$$\hat{\alpha} = \text{arc } \alpha = \frac{\text{longitud de arco}}{\text{radio}}$$



La longitud de un arco (b) es el producto del radio r y el ángulo central $\hat{\alpha}$ (en radianes) de la circunferencia: $b = r\hat{\alpha}$.



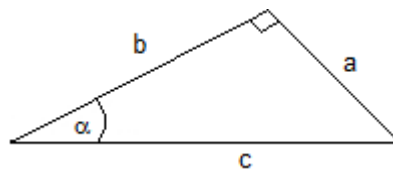
Funciones trigonométricas

En un triángulo rectángulo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$



Operaciones con funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{cos}^2 A = 1$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\csc^2 A - \cot^2 A = 1$$

$$\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{cos} A}$$

$$\cot A = \frac{\operatorname{cos} A}{\operatorname{sen} A}$$

$$\operatorname{sen} A \csc A = 1$$

$$\operatorname{cos} A \sec A = 1$$

$$\tan A \cot A = 1$$

$$\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{cos}(-A) = \operatorname{cos} A$$

$$\tan(-A) = -\tan A$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A$$

$$\operatorname{cos}^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2A$$

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \operatorname{cos} A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \operatorname{cos} B \pm \operatorname{cos} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{cos}(A \pm B) = \operatorname{cos} A \operatorname{cos} B \pm \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$$

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} A}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} A}{2}}$$

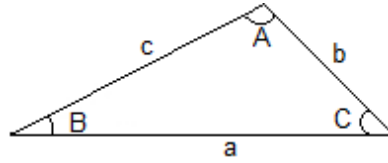
$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(A - B) - \operatorname{cos}(A + B)]$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

$$\operatorname{cos} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(A - B) + \operatorname{cos}(A + B)]$$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Las leyes siguientes son válidas para cualquier triángulo plano ABC de lados a, b, c y de ángulos A, B, C.



Ley de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar

Ley de las tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$$

Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar

Teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Valores de las funciones de ángulos importantes

θ	$\text{sen } \theta$	$\text{cos } \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

Relaciones entre ángulo simple, ángulo doble y mitad de ángulo

$\text{sen } \alpha$	$\text{cos } \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha)$	$= \text{sen}(90^\circ - \alpha)$	$= \cot(90^\circ - \alpha)$	$= \tan(90^\circ - \alpha)$
$= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$= \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$	$= \frac{1}{\cot \alpha}$	$= \frac{1}{\tan \alpha}$
$= 2 \text{sen } \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$	$= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$	$= \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$	$= \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$
$= \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$= \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$= \frac{\text{sen } \alpha}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}}$	$= \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$
$= \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha}$	$= 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$	$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}$	$= \sqrt{\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} - 1}$
$= \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$	$= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$	$= \frac{\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \cot \frac{\alpha}{2}}$
$= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$	$= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$		

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

$\text{sen} 2\alpha$	$\text{cos} 2\alpha$	$\tan 2\alpha$	$\cot 2\alpha$
$= 2\text{sen}\alpha \cos\alpha$	$= \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$ $= 2\cos^2 \alpha - 1$ $= 1 - 2\text{sen}^2 \alpha$	$= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ $= \frac{2}{\cot \alpha - \tan \alpha}$	$= \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$ $= \frac{1}{2} \cot \alpha - \frac{1}{2} \tan \alpha$
$\text{sen} \frac{\alpha}{2}$	$\cos \frac{\alpha}{2}$	$\tan \frac{\alpha}{2}$	$\cot \frac{\alpha}{2}$
$= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	$= \frac{\text{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$ $= \frac{1 - \cos \alpha}{\text{sen} \alpha}$ $= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$	$= \frac{\text{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha}$ $= \frac{1 + \cos \alpha}{\text{sen} \alpha}$ $= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$

Números complejos

Forma trigonométrica o polar de un número complejo

Se tiene que $r = |z| = |(x, y)|$ y que $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

Luego:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$z = (x, y) = x + yi = r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Forma exponencial de un número complejo

Sea $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ un número complejo donde r es su módulo y θ su argumento. Entonces mediante el empleo de la fórmula de Euler se obtiene:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta}$$

Operaciones de números complejos en forma polar

$$(r_1 \angle \theta_1)(r_2 \angle \theta_2) = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2) \quad \text{Nota: } \angle \theta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

$$\sqrt[n]{r \angle \theta} = \sqrt[n]{r} \angle \frac{\theta + k(360^\circ)}{n}; \quad k \text{ entero}$$

$$\ln(r e^{i\theta}) = \ln r + (\theta + 2k\pi) i; \quad k \text{ entero}$$

Teorema de De Moivre

Siendo p un número real cualquiera, el teorema de De Moivre establece que

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^p = r^p (\cos p\theta + i \operatorname{sen} p\theta)$$

Sea n cualquier entero positivo y $p = \frac{1}{n}$, entonces:

$$\left[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \right]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

donde k es un entero positivo. De aquí se pueden obtener las n raíces n -ésimas distintas de un número complejo haciendo $k = 0, 1, 2, \dots$.

Análisis vectorial

Magnitud, dirección y componentes de vectores

Vector: Representación de una cantidad física con magnitud y dirección.

Coordenadas del punto inicial A del vector $\vec{a}$: x_1, y_1, z_1

Coordenadas del punto final B del vector $\vec{a}$: x_2, y_2, z_2

Vectores unitarios sobre los ejes OX, OY, OZ : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

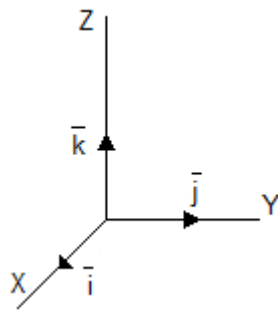
Componentes escalares

$$a_x, a_y, a_z \geq 0$$

$$a_x = x_2 - x_1$$

$$a_y = y_2 - y_1$$

$$a_z = z_2 - z_1$$



Componentes vectoriales

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Magnitud de un vector: $|\vec{a}|$ (o bien, a)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (|\vec{a}| \text{ siempre } \geq 0)$$

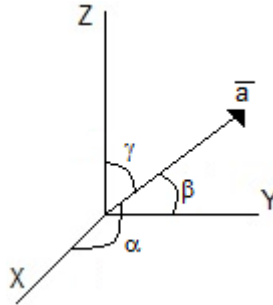
Cosenos directores de un vector: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$

α, β, γ son los ángulos entre el vector $\vec{a}$ y los ejes OX, OY, OZ ($\alpha, \beta, \gamma = 0^\circ \dots$)

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Cálculo de las componentes. Si se conocen $|\vec{a}|, \alpha, \beta, \gamma$,

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha; \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta; \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma$$



Observación: Operaciones vectoriales como la determinación de magnitudes, cosenos directores, sumas y productos se llevan a cabo con las componentes de los vectores a lo largo de los ejes OX, OY, OZ

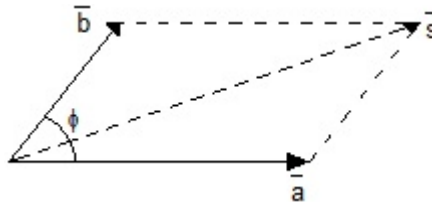
Adición y sustracción de vectores

Suma vectorial $\vec{s}$ de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$$

$$s_x = a_x + b_x, s_y = a_y + b_y, s_z = a_z + b_z$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$$

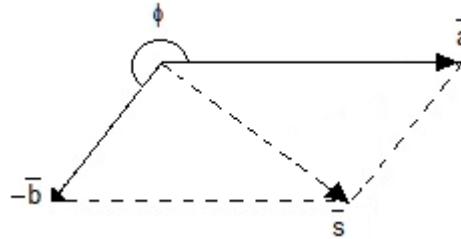


Diferencia vectorial $\vec{s}$ de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\vec{s} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$s_x = a_x - b_x, s_y = a_y - b_y, s_z = a_z - b_z$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$$



Valores importantes $ \vec{s} $ para 2 vectores	ϕ	$0^\circ; 360^\circ$	90°	180°	270°
	$ \vec{a} \neq \vec{b} $	$ \vec{a} + \vec{b} $	$\sqrt{ \vec{a} ^2 + \vec{b} ^2}$	$ \vec{a} - \vec{b} $	$\sqrt{ \vec{a} ^2 + \vec{b} ^2}$
	$ \vec{a} = \vec{b} $	$2 \vec{a} $	$ \vec{a} \sqrt{2}$	0	$ \vec{a} \sqrt{2}$

Suma vectorial $\vec{s}$ de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $-\vec{c}$, etc.:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \dots = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$$

$$s_x = a_x + b_x - c_x + \dots, s_y = a_y + b_y - c_y + \dots, s_z = a_z + b_z - c_z + \dots$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$$

Producto de un escalar por un vector

Escalar: Magnitud física sin dirección.

El producto escalar k con el vector $\vec{a}$ da el vector $\vec{c}$

$$\vec{c} = k \cdot \vec{a}$$

$$c_x = k \cdot a_x; c_y = k \cdot a_y; c_z = k \cdot a_z; c = k \cdot |\vec{a}|$$

Si $k > 0$ entonces $\vec{c} \parallel \vec{a}$ por lo que:



Si $k < 0$ entonces $\vec{c} \perp \vec{a}$ por lo que:



Productos de dos vectores libres

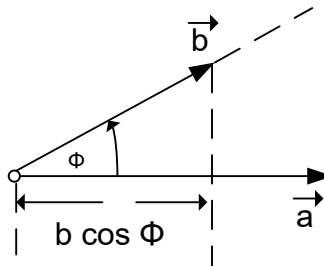
El producto escalar de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ da el escalar k

Símbolo del producto escalar: punto “ $\cdot$ ”

$$k = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi$$

$$k = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\phi = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

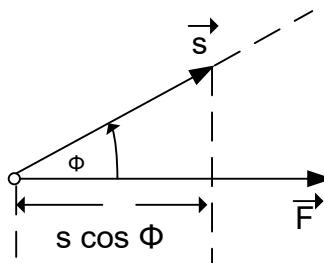


Valores importantes	ϕ	$0^\circ; 360^\circ$	90°	180°	270°
	$ \vec{a} \vec{b} \cos \phi$	$+ \vec{a} \vec{b} $	0	$- \vec{a} \vec{b} $	0

Ejemplo: Trabajo W de una fuerza F en el desplazamiento s

$$W = \text{Fuerza} \times \text{Desplazamiento} = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$W = F s \cos \phi$$



El producto vectorial de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ da el vector $\vec{c}$

Símbolo del producto vectorial: cruz "x"

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

$$|\vec{c}| = ab \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ y } \vec{c} \perp \vec{b}$$

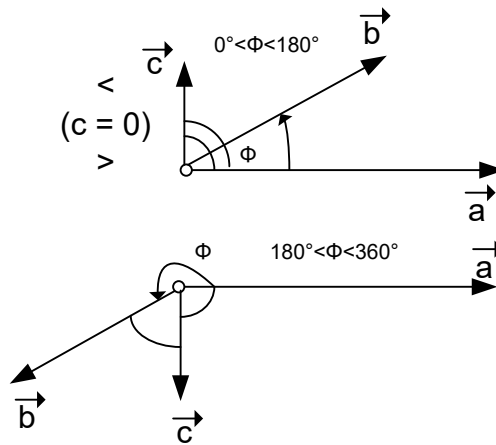
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ forman una triada derecha

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$



Valores importantes	φ	$0^\circ; 360^\circ$	90°	180°	270°
	$ \vec{a} \vec{b} \sin \varphi$	0	$+ \vec{a} \vec{b} $	0	$- \vec{a} \vec{b} $

$$A \bullet B = \|A\| \|B\| \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

donde θ es el ángulo formado por A y B

$$A \bullet B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

donde:

$$A = A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}$$

$$B = B_1 \hat{i} + B_2 \hat{j} + B_3 \hat{k}$$

Son resultados fundamentales:

$$\text{Producto cruz: } A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{k}$$

$$\text{Magnitud del producto cruz } \|A \times B\| = \|A\| \|B\| \sin \theta$$

El operador *nabla* se define así:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

En las fórmulas siguientes se asume que $U = U(x, y, z)$ y $A = A(x, y, z)$ tienen derivadas parciales.

Gradiente de U

$$\text{grad}(U) = \nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) U = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Divergencia de A

$$\text{div}(A) = \nabla \cdot A = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

Rotacional de A

$$\begin{aligned} \text{rot} A &= \nabla \times A = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Laplaciano de U

$$\nabla^2 U = \nabla \cdot (\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Fracciones racionales

Descomposición

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}$$

donde n y m son enteros y $n > m$.

Los coeficientes a_γ, b_μ pueden ser reales o complejos. Si n_δ son las raíces de $Q(x)$, se obtiene la forma factorizada:

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\alpha(x - n_1)^{k_1}(x - n_2)^{k_2} \dots (x - n_q)^{k_q}}$$

En esta expresión pueden representarse raíces de multiplicidad $k_1, k_2, \dots, k_q$ de $Q(x)$, que pueden ser reales o complejas; α es un factor constante.

Descomposición de fracciones parciales

Para lograr un manejo más sencillo de $y(x)$ es conveniente descomponerla en fracciones parciales:

$$y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - n_1} + \frac{A_{12}}{(x - n_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x - n_1)^{k_1}} +$$

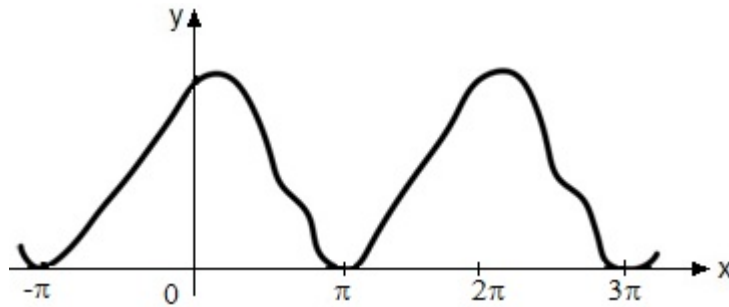
$$\frac{A_{21}}{x - n_2} + \frac{A_{22}}{(x - n_2)^2} + \dots + \frac{A_{2k_2}}{(x - n_2)^{k_2}} + \dots +$$

$$\frac{A_{q1}}{x - n_q} + \frac{A_{q2}}{(x - n_q)^2} + \dots + \frac{A_{qk_q}}{(x - n_q)^{k_q}}$$

Si los coeficientes de $Q(x)$ son reales, aparecen raíces complejas por parejas (raíces complejas conjugadas). Para efectuar la descomposición se agrupan estas parejas en fracciones parciales reales. Si en $b'1, n_2 = n_1$ (compleja conjugada de n_1) y debido a su aparición por parejas $k_1 = k_2 = k_3$, entonces las fracciones parciales de $b'2$, con las constantes $A_{11}, \dots, A_{2k_2}$ pueden agruparse en las fracciones parciales:

$$\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + ax + b} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + ax + b)^2} + \dots + \frac{B_{1k}x + C_{1k}}{(x^2 + ax + b)^k}$$

Series de Fourier



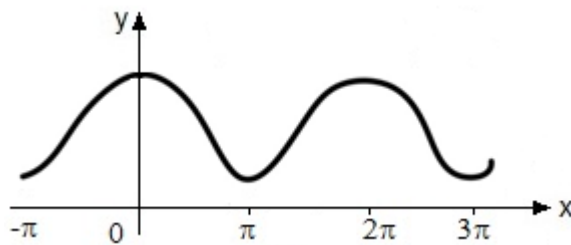
Toda función periódica $f(x)$, que puede descomponerse en el intervalo de periodicidad $-\pi \leq x \leq \pi$ en un número finito de intervalos continuos, podrá descomponerse en ese intervalo en una serie convergente de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Los coeficientes de cada término se forman como sigue:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx$$

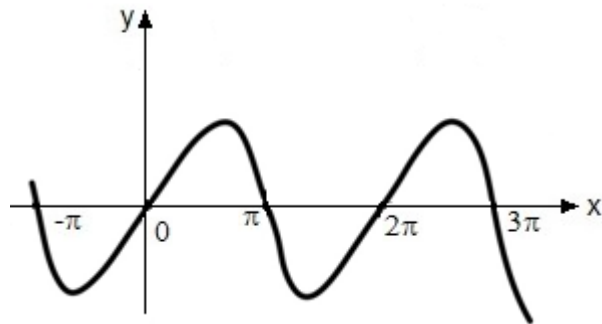
Funciones pares: $f(x) = f(-x)$



$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = 0$$

Funciones impares: $f(x) = -f(-x)$



$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Tablas de desarrollo en series de Fourier

$y = a$ para $0 < x < \pi$ $y = -a$ para $\pi < x < 2\pi$ $y = \frac{4a}{\pi} \left[\text{sen } x + \frac{\text{sen}(3x)}{3} + \frac{\text{sen}(5x)}{5} + \dots \right]$	
$y = a$ para $\alpha < x < \pi - \alpha$ $y = -a$ para $\pi + \alpha < x < 2\pi - \alpha$ $y = \frac{4a}{\pi} \left[\cos \alpha \text{sen } x + \frac{1}{3} \cos(3\alpha) \text{sen}(3x) + \frac{1}{5} \cos(5\alpha) \text{sen}(5x) + \dots \right]$	
$y = a$ para $\alpha < x < 2\pi - \alpha$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{2a}{\pi} \left[\frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\text{sen}(\pi - \alpha)}{1} \cos x + \frac{\text{sen} 2(\pi - \alpha)}{3} \cos 2x - \frac{\text{sen} 3(\pi - \alpha)}{3} \cos 3x + \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{b}$ para $0 \leq x \leq b$ $y = a$ para $b \leq x \leq \pi - b$ $y = \frac{a(\pi - x)}{b}$ para $\pi - b \leq x \leq \pi$ $y = \frac{4a}{\pi b} \left[\frac{1}{1^2} \text{sen } b \text{sen } x + \frac{1}{3^2} \text{sen}(3b) \text{sen}(3x) + \frac{1}{5^2} \text{sen}(5b) \text{sen}(5x) + \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{2\pi}$ para $0 < x < 2\pi$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi} \left[\frac{\text{sen } x}{1} + \frac{\text{sen} 2x}{2} + \frac{\text{sen} 3x}{3} + \dots \right]$	

$y = \frac{2ax}{\pi} \text{ para } 0 \leq x \leq \pi/2$ $y = \frac{2a(\pi - x)}{\pi} \text{ para } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ $y = -f(\pi + x)$ $y = \frac{8}{\pi^2} a \left[\text{sen } x - \frac{\text{sen } 3x}{3^2} + \frac{\text{sen } 5x}{5^2} - \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{\pi} \text{ para } 0 \leq x \leq \pi$ $y = \frac{a(2\pi - x)}{\pi} \text{ para } \pi < x < 2\pi$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$	
$y = a \text{sen } x \text{ para } 0 \leq x \leq \pi$ $y = -a \text{sen } x \text{ para } \pi \leq x \leq 2\pi$ $y = f(\pi + x)$ $y = \frac{2a}{\pi} - \frac{4a}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right]$	
$y = 0 \text{ para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $y = a \text{sen}(x - \frac{\pi}{2}) \text{ para } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{2a}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} - \frac{\cos 4x}{4^2 - 17} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} - \dots \right]$	
$y = x^2 \text{ para } \pi \leq x \leq -\pi$ $y = f(-x) = f(2\pi + x)$ $y = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{\pi} \text{ para } 0 < x < \pi$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{a}{4} - \frac{2a}{\pi^2} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right]$ $+ \frac{a}{\pi} \left[\frac{\text{sen } x}{1} - \frac{\text{sen } 2x}{2} + \frac{\text{sen } 3x}{3} - \dots \right]$	

Transformada de Fourier

Definiciones:

$$F\{s(t)\} = S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt; \quad j = \sqrt{-1}$$

$$F^{-1}\{S(w)\} = s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) e^{j\omega t} dw; \quad j = \sqrt{-1}$$

Reglas de operación

Desplazamiento en tiempo $F\{s(t - \tau)\} = S(w) e^{-j\omega \tau}$

Convolución

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\tau) * s_1(t - \tau) d\tau$$

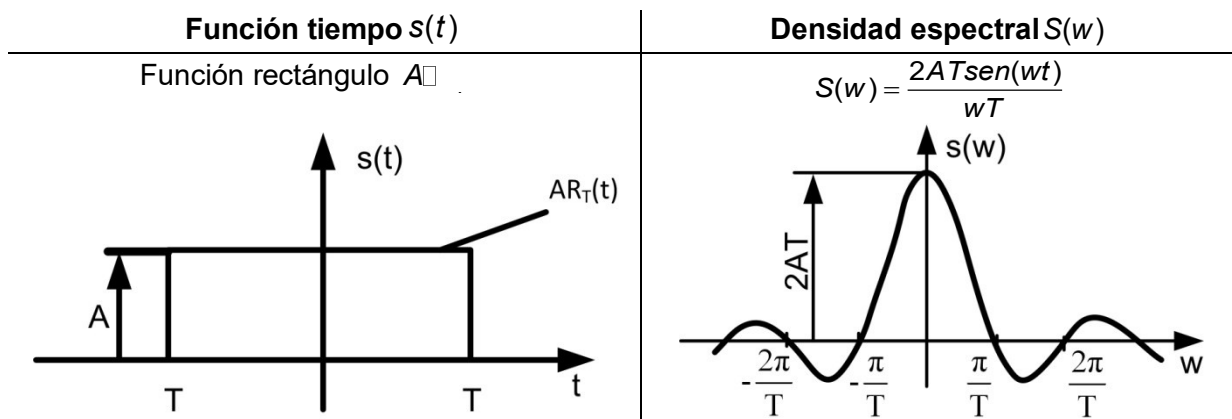
$$F\{s_1(t) \cdot s_2(t)\} = S_1(w) * S_2(w)$$

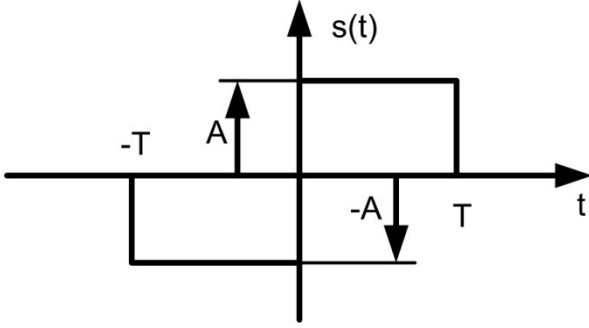
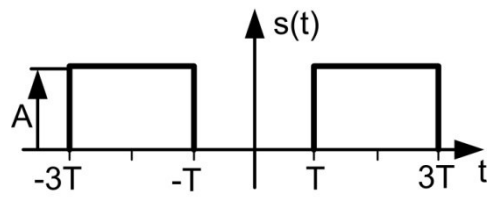
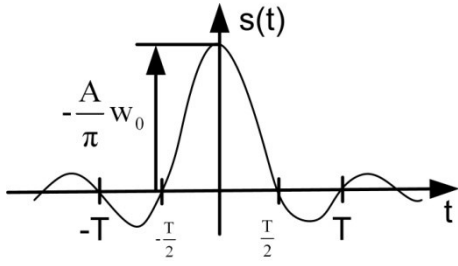
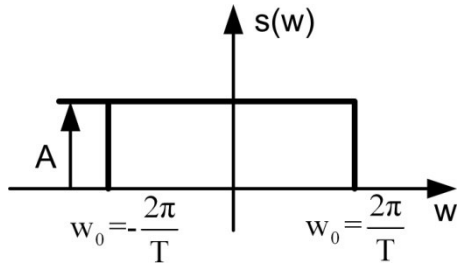
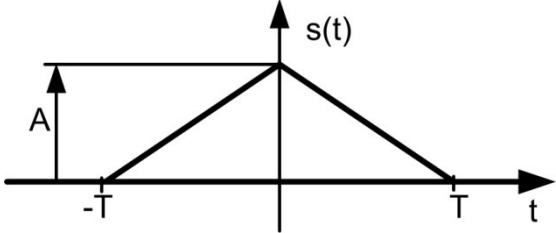
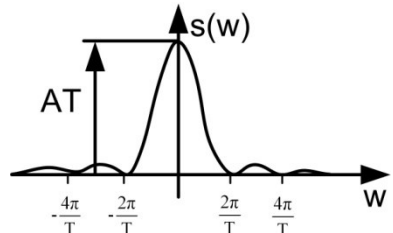
$$F\{s(t)\} = S(w)$$

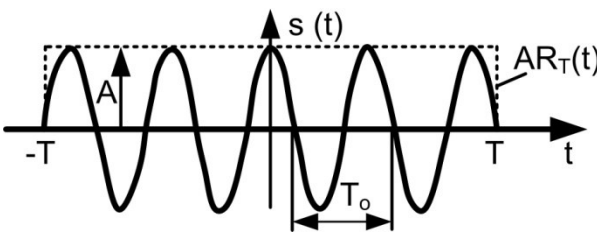
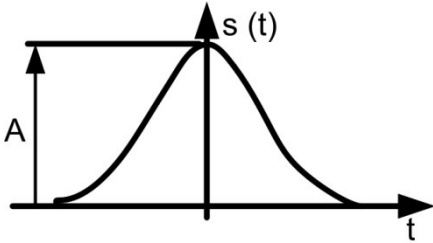
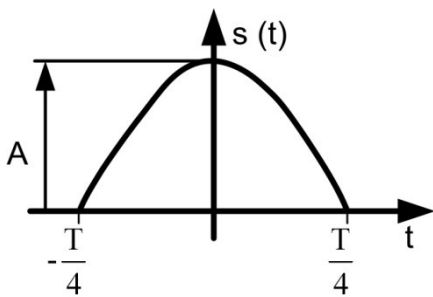
$$F\{s(at)\} = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{w}{a}\right), \quad a > 0$$

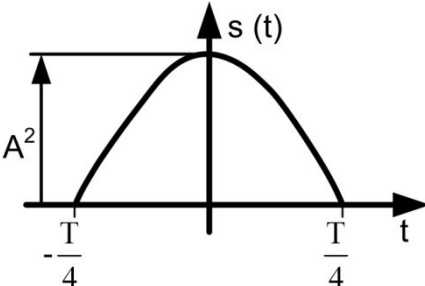
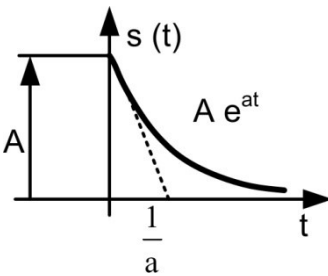
$$F\{s_1(t) + s_2(t)\} = S_1(w) + S_2(w)$$

Enseguida se indican las densidades espectrales calculadas para algunas importantes funciones del tiempo.



Función tiempo $s(t)$	Densidad espectral $S(w)$
Función rectángulo con cambio de signo 	$S(w) = -j2AT \frac{\text{sen}^2 \frac{wt}{2}}{\frac{wt}{2}}$
	$S(w) = 4AT \cos(2wt) \frac{\text{sen} wt}{wt}$
$s(t) = \frac{A}{\pi} w_0 \frac{\text{sen}(w_0 t)}{w_0 t} \quad w_0 = \frac{2\pi}{T}$ 	$S(w) = AR_{w_0}(w)$ (Función rectángulo) 
Función triángulo $AD_T(t)$ 	$S(w) = \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{Tw}{2}\right)}{\frac{Tw}{2}} \right)^2 AT$ 

Función tiempo $s(t)$	Densidad espectral $S(w)$
Rectángulo modulado $A \square \quad s(w_0 t) w_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{aT}$ 	$S(w) = A \frac{\text{sen} T(w + w_0)}{w + w_0} + A \frac{\text{sen} T(w - w_0)}{w - w_0}$
Impulso de Gauss $Ae^{-a^2 t^2}$ 	$S(w) = \frac{A}{a} \sqrt{\pi} e^{-\frac{w^2}{a^2}}$
Impulso coseno $A \cos(w_0 t) w_0 = \frac{2\pi}{T}$ 	$S(w) = \frac{AT}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{T}{4}w\right)}{1 - \left(\frac{T}{2\pi}w\right)^2}$
Impulso $\cos^2 A^2 \cos^2(w_0 t) w_0 = \frac{2\pi}{T}$	$S(w) = \frac{AT}{4} \frac{\text{sen}\left(\frac{T}{4}w\right)}{\left(\frac{T}{4}w\right)} \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{4\pi}w\right)^2}$

	
Función tiempo $s(t)$	Densidad espectral $S(w)$
Impulso exponencial 	$S(w) = \frac{A}{jw + a}$

Transformada de Laplace

Definiciones:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt;$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{st} ds; \quad j = \sqrt{-1}$$

Reglas de operación

Linealidad	$L\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$ $L\{c f(t)\} = c F(s)$
Teorema de traslación	$L\{f(t - a)\} = e^{-as} F(s)$
Teorema de convolución	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ $L\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) F_2(s)$
Cambio de variable	$L\left\{\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = F(as)$
Diferenciación	$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ $L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ $L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1}$
Integración	$L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$

Tabla de transformadas de Laplace:

$f(t)$	$F(s) = L \{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$
2. $t^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
4. $e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$
5. $\text{sen} kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
6. $\cos kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
7. $\text{senh} kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
8. $\cosh kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$
9. $e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
10. $\mu(t - a), a \geq 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$
11. $f(t - a)U(t - a), \quad a \geq 0$	$e^{-as}F(s)$
12. $t^n f(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
13. $f^n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
14. $\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
15. $\delta(t - t_0), t_0 \geq 0$	e^{-st_0}
16. $t^n e^{at}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
17. $e^{at} \text{sen} kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$

Formulario para el sustentante del

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

18. $e^{at} \cos kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$
19. $t \sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
20. $t \cos kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
21. $\sin kt - kt \cos kt$	$\frac{2k^3}{(s^2 + k^2)^2}$
22. $\sin kt + kt \cos kt$	$\frac{2ks^2}{(s^2 + k^2)^2}$
23. $\sinh kt - \sin kt$	$\frac{2k^3}{s^4 - k^4}$
24. $\cosh kt - \cos kt$	$\frac{2k^2 s}{s^4 - k^4}$
25. $1 - \cos kt$	$\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$
26. $kt - \sin kt$	$\frac{k^3}{s(s^2 + k^2)}$
27. $\frac{a \sin bt - b \sin at}{ab(a^2 - b^2)}$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
28. $\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
29. $\delta(t)$	1
30. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
31. $\exp(at) - 1$	$\frac{a}{s(s - a)}$
32. $\frac{1}{T} \exp(-t/T)$	$\frac{1}{1 + Ts}$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

33. $\frac{1}{2k} \sin(kt)$	$\frac{s}{(s^2 + k^2)^2}$
34. $\frac{1}{2k} \sin(kt) + \frac{t}{2} \cos(kt)$	$\frac{s^2}{(s^2 + k^2)^2}$
35. $\cos(kt) - \frac{k}{2} t \sin(kt)$	$\frac{s^3}{(s^2 + k^2)^2}$
36. $\frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}, b \neq a$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$
37. $\frac{1}{k} e^{-at} \bullet \sin(kt)$	$\frac{1}{(s + a)^2 + k^2}$
38. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
39. $2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}$
40. $-\frac{1}{2\sqrt{\pi} \bullet t^{3/2}}$	$\sqrt{s}$
41. $\frac{3}{4\sqrt{\pi} \bullet t^{5/2}}$	$s\sqrt{s}$
42. $\frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\ln \frac{s + b}{s + a}$
43. $\frac{1}{t} \sin(a \cdot t)$	$\tan^{-1}(a/s)$
44. $\frac{a}{2t\sqrt{\pi t^e}} e^{\frac{-a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{s}}; a > 0$
45. $\operatorname{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}}$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}; a \geq 0$
46. Función de Bessel $J_0(kt)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + k^2}}$

Transformada inversa

Fracciones parciales

Sea:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

donde:

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$$

Si $G(s)$ tiene polos simples

$$G(s) = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_n}{s + s_n}$$

$$K_i = \left[(s + s_i) \frac{Q(s)}{P(s)} \right]_{s=-s_i}$$

Si $G(s)$ tiene polos de orden múltiple

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_{r-1})(s + s_i)^r}$$

Siendo: $i \neq 1, 2, \dots$

$$G(s) = \underbrace{\frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_{n-r}}{s + s_{n-r}}}_{n - r \text{ términos de polos simples}} + \underbrace{\frac{A_r}{(s + s_i)^r} + \frac{A_{r-1}}{(s + s_i)^{r-1}} + \dots + \frac{A_1}{(s + s_i)^1}}_{r \text{ términos de polos repetidos}}$$

$$A_r = \left[(s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i}$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds} \left[(s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i}$$

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i}$$

$$A_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[(s + s_i)^r G(s) \right]_{s=-s_i}$$

Probabilidad y estadística

Parámetro

**Estimador
puntual**

**Intervalo de confianza
(1- α) 100%**

Media μ

(varianza σ^2 conocida) $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

$$\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Varianza σ^2 (de una distribución normal)

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s_{n-1}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

Desviación estándar de distribución de medias

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Valor promedio (media)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Media de medias

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{X}_j}{m}$$

Intervalo o rango de valores

$$R = V_{\max} - V_{\min}$$

Media de rangos

$$\bar{R} = \frac{\sum_{j=1}^m R_j}{m}$$

Hipótesis nula

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad \sigma^2 \text{ conocida}$$

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad \sigma^2 \text{ desconocida}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Estadístico de prueba

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$t_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2}$$

Regresión lineal

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$\beta_0 = y - \beta_1 x$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}$$

Coefficiente de correlación de la muestra

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right]^{1/2}}$$

Permutaciones

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Combinaciones

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Permutaciones con objetos similares

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Probabilidad condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema de Bayes

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^N P(B_i)P(A|B_i)}$$

Valor promedio

$$a_{prom} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

donde:

a_{prom} = valor promedio
 a_n = valor de cada lectura
 n = número de lecturas

Desviación estándar y varianza

$$\sigma = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}{n - 1}}$$

donde:

σ = desviación estándar
 d_i = desviación de la lectura i -ésima con respecto al valor promedio
La varianza V es el valor de la desviación estándar σ elevado al cuadrado

Distribución gaussiana

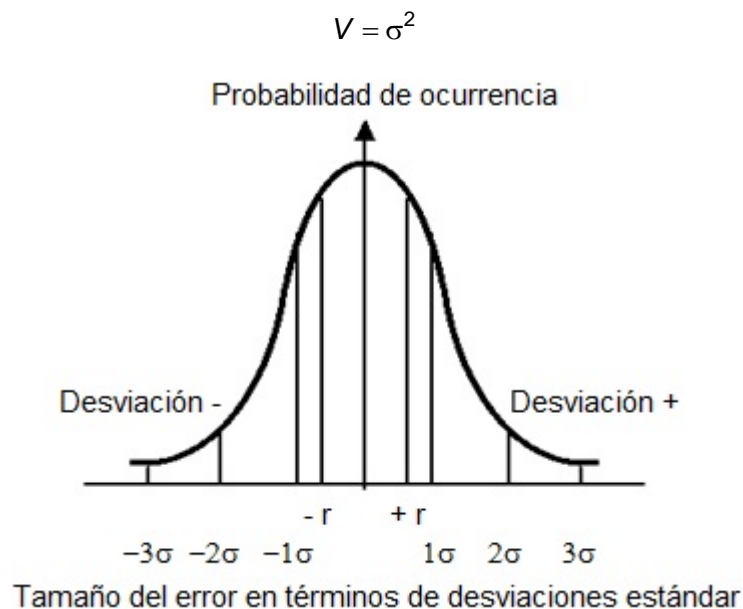
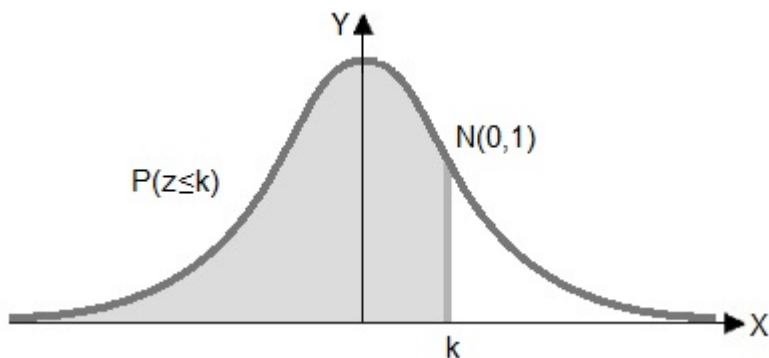


Tabla de distribución de probabilidad normal estándar



z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999
3.1	0.999	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Modelos probabilísticos comunes

Nombre	Distribución	Rango	Media	Varianza	Función generatriz de momentos
Binomial	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$x = 0, 1, \dots, n$	np	npq	$(q + pe^\theta)^n$
Geométrica	pq^{x-1}	$x = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^\theta}{1 - qe^\theta}$
De Pascal (Binomial negativa)	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$	$x = r, r+1, \dots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\left(\frac{pe^\theta}{1 - qe^\theta} \right)^r$
De Poisson	$\frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$	$x = 0, 1, 2, \dots$	λt	λt	$e^{\lambda t(e^\theta - 1)}$
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	$a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{b\theta} - e^{a\theta}}{(b-a)\theta}$
Exponencial	$\lambda e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - \theta}$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$-\infty < x < \infty$	μ	σ^2	$e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$
Ji-cuadrada		$x > 0$	v	$2v$	$(1 - 2\theta)^{-\frac{v}{2}}$
t de Student		$-\infty < x < \infty$	0	$\frac{v}{v-2}, v > 2$	
F (de Fisher)		$0 < x < \infty$	$\frac{v_2}{v_2 - 2}, v_2 > 2$	$\frac{2v_2^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)}, v_2 > 4$	
Erlang	$\frac{\lambda(\lambda t)^{r-1} e^{-\lambda t}}{(r-1)!}$	$t > 0$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	

Física

Mecánica

Centroides

Arco de circunferencia

$$y = \frac{r(\sin \alpha) \left(\frac{180^\circ}{\alpha} \right)}{\pi \left(\frac{\alpha^\circ}{\alpha} \right)} = \frac{rs}{b}$$

Triángulo

$$y = \frac{1}{3} h$$

Sector de círculo

$$y = \frac{2r(\sin \alpha) \left(\frac{180^\circ}{\alpha} \right)}{3\pi \left(\frac{\alpha^\circ}{\alpha} \right)} = \frac{2rs}{3b}$$

Trapezio

$$y = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}$$

Segmento de corona circular

$$y = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$y = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \frac{s}{b}$$

Segmento de círculo

$$y = \frac{s^3}{12A}$$

Estática

Fuerza aplicada paralelamente al plano de deslizamiento

Fricción estática

$$\begin{aligned}F_{f1} &= -F_1 = G \tan \phi_1 \\N &= -G \\C &< \phi_1 (\text{variable}) < \phi_0\end{aligned}$$

Valor límite

$$\begin{aligned}F_{f0} &= -F_0 = G \tan \phi_0 \\N &= -G \\\mu_0 &= \tan \phi_0 > \mu \\\phi_0 &= \text{constante} > \phi\end{aligned}$$

Fricción dinámica

$$\begin{aligned}F_f &= -F = G \tan \phi \\N &= -G \\\mu &= \tan \phi > \mu_0 \\\phi &= \text{constante} > \phi_0\end{aligned}$$

Fuerza aplicada oblicuamente respecto al plano de deslizamiento

$$F = G \frac{\mu_0}{\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha} = G \frac{\sin \phi_0}{\sin(\alpha - \phi_0)}$$

Rozamiento en un plano inclinado

$$\tan \alpha = \tan \phi = \mu$$

Fricción de chumaceras

De carga radial

$$M_1 = \mu_r r F$$

De carga axial

$$M_f = \mu_\alpha \frac{r_1 + r_2}{2} F$$

Fricción rodante

Rodamiento de un cilindro macizo

$$F = \frac{f}{r} N \cong \frac{f}{r} G$$

Condición de rodamiento

$$F_f < \mu_0 N$$

Movimiento de una placa sobre rodillos

$$F = \frac{(f_1 + f_2) G_1 + n f_2 G_2}{2r}$$

Si $f_1 = f_2 = f$ y $n G_2 < G_1$

$$F = \frac{f}{r} G_1$$

Fricción en cables

Fuerza de tracción para subir la carga G

$$F_1 = e^{\mu_0} G, \quad F_f = (e^{\mu_0} - 1) G$$

Fuerza de tracción para bajar la carga G

$$F_2 = e^{-\mu_0} G, \quad F_f = (1 - e^{-\mu_0}) G$$

Transmisión de banda o correa

$$F_p = \frac{M_i}{r} \quad \text{y} \quad F_p = F$$

En movimiento

$$F_0 = \frac{F_p}{e^{\mu_0} - 1}$$

$$F_1 = F_p \frac{e^{\mu_0}}{e^{\mu_0} - 1}$$

$$F_a = F_p \frac{e^{\mu_0} + 1}{e^{\mu_0} - 1}$$

En reposo

$$F_0 = F_1 = \frac{F_a (e^{\mu_0} + 1)}{2(e^{\mu_0} - 1)}$$

$$F_a = F_p \frac{e^{\mu_0} + 1}{e^{\mu_0} - 1}$$

Cinemática

$$F = xi + yj + zk$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_t}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt}$$

$$\vec{v} = v \vec{u}_t$$

$$\vec{v} = v \vec{u}_t$$

$$\vec{a} = \left(\frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt} \right)$$

Movimiento en una dimensión

$$x = vt$$

$$x = x_0 + vt$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} (v + v_0)$$

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2} (v_0 + v)t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Dinámica

$$\vec{F} = m\vec{a} = \left(\frac{W}{g}\right)\vec{a} \quad W: \text{peso}$$

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

$$\Sigma F = m \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{X_B}{A} = X_B - X_A$$

$$\frac{V_B}{A} = V_B - V_A$$

$$\frac{a_B}{A} = a_B - a_A$$

Características cinemáticas de puntos y segmentos rectilíneos

Conceptos lineales y angulares¹

Se tiene que son conceptos lineales:

r = posición, v = velocidad, a = aceleración, t = tiempo

Se tiene que son conceptos angulares:

θ = posición, w = velocidad, α = aceleración, t = tiempo

Expresión que relaciona ambos conceptos:

$$v = wxr$$

¹ Por simplicidad se omite la dependencia del tiempo en las funciones. Por ejemplo: $v(t) \equiv V$.

Conceptos correspondientes a puntos y partículas en movimiento

Concepto	Símbolo(s) más común(es)	Relación con otra(s) función(es)
Vector de posición (lineal)	r	
Velocidad (lineal)	v, r	$v = \frac{dr}{dt}$
Aceleración (lineal)	a, r	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$

Conceptos correspondientes a segmentos rectilíneos que modifican su dirección durante el movimiento, y de cuerpos rígidos que contengan ese tipo de segmentos

Concepto	Símbolo(s) más común(es)	Relación con otra(s) función(es)
Vector de posición (angular)	θ	
Velocidad (angular)	w, θ	$w = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración (angular)	α, θ	$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Componentes cartesianas de los vectores de posición, velocidad y aceleración lineales para movimientos en el espacio, en un plano y rectilíneos.

$$r = r(t) = xi + yj + zk$$

$$v = r = x i + y j + z k$$

$$a = r = x i + y j + z k$$

Entonces, si P se mueve en el plano xy tenemos:

$$r = r(t) = xi + yj$$

$$v = r = x i + y j$$

$$a = r = x i + y j$$

Si P realiza un movimiento rectilíneo cualquiera en el eje x se tienen:

$$r = r(t) = xi$$

$$v = r = x i$$

$$\vec{a} = \vec{r} \times \vec{\omega}$$

Relaciones entre conceptos lineales y angulares.

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \alpha \vec{r}$$

Cinemática del cuerpo rígido

$$\vec{v} = \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{p}$$

$$\vec{a} = \vec{R} + \alpha \vec{p} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{p})$$

Ecuaciones aplicables a cualquier tipo de movimiento del cuerpo rígido.

Centro y eje instantáneo de rotación.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

donde $\vec{r}$ es un vector perpendicular al eje instantáneo de rotación.

Primeros momentos de la masa de un sistema de partículas.

Con respecto a los planos xy , xz , yz tenemos:

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad M_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Primeros momentos de la masa de un cuerpo rígido.

$$M_{xy} = \int_V z dM, \quad M_{xz} = \int_V y dM, \quad M_{yz} = \int_V x dM$$

Ecuaciones escalares de centro de masa.

$$M_{x_c} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad M_{y_c} = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad M_{z_c} = \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Para cuerpos rígidos tenemos:

$$M_{x_c} = \int_V x dM, \quad M_{y_c} = \int_V y dM, \quad M_{z_c} = \int_V z dM$$

Momentos de inercia de la masa de un cuerpo rígido.

$$I_{xx} = MM_{xz} + MM_{xy}$$

$$I_{yy} = MM_{yz} + MM_{xy}$$

$$I_{zz} = MM_{yz} + MM_{xz}$$

Dinámica de la partícula

Ecuaciones de movimiento

$$F = ma$$

Trabajo y energía

$$dT = p \cdot dx$$

Energía cinética y su relación con el trabajo realizado por la fuerza resultante que actúa sobre una partícula

$$EC = \frac{1}{2} m v^2$$

Impulso y cantidad de movimiento lineales

$$\int_2^1 F dt = (mv)_2 - (mv)_1$$

Ecuación del impulso y la cantidad de movimiento lineales

Ecuación diferencial de movimiento para sistemas de partículas

$$F = \sum_{i=1}^n m_i a_i$$

$$F = Ma_c$$

$$\int_1^2 F dt = \left(\sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_1$$

Ecuación de impulso y cantidad de movimiento lineales para sistemas de partículas

Principio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal para sistemas de partículas.

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_2 - \left(\sum_{i=1}^n m_i v_i \right)_1 = 0$$

Ecuación para obtener la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido.

$$H_{cc} = I_{cc} \omega$$

Ecuación para obtener la suma de los momentos de los elementos mecánicos que actúan sobre un cuerpo rígido.

$$M_{cc} = I_{cc} \alpha$$

Momento de un sistema de fuerzas y/o pares que actúan sobre un cuerpo, con respecto al eje CC.

$$M_{cc} = \sum_{i=1}^n (p_i * F_i)$$

Primera forma de la ecuación del trabajo y la energía para un cuerpo rígido que realiza un movimiento plano general.

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n \int_1^2 \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{r}_j, \quad \Delta \theta_j = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_{cc} \omega^2$$

Ecuación del impulso y la cantidad de movimiento angulares.

$$\int_1^2 M_{cc} dt = I_{cc} (\omega_2 - \omega_1)$$

Modelo matemático correspondiente a las vibraciones libres con un grado de libertad.

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \text{ con } \omega_n^2 = \text{cte}$$

Modelo matemático correspondiente a las vibraciones forzadas con un grado de libertad.

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_e}{m}$$

donde $\omega_n^2 = \text{cte}$.

Trabajo, energía y conservación de la energía

$$U = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$P = \frac{U}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{r}}{t} = r \cdot \frac{\vec{F}}{t}$$

P : potencia

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}}$$

η : eficiencia

$$U = \Delta K = K_f - K_i$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

K : energía cinética

$$W = -\Delta V = V_f - V_i$$

V : energía potencial

$$V(y) = mgy$$

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

Impulso e ímpetu

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt$$

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

p : ímpetu

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int \vec{F} dt$$

$\Delta \vec{p}$: impulso

Electricidad y magnetismo

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad |\vec{F}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \vec{r} = r_1 - r_2$$

$$E = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \epsilon_0 \quad \Phi_E : \text{flujo eléctrico}$$

$$V = k \frac{q}{r} \quad V : \text{potencial electrostático}$$

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -\frac{W_{ab}}{q} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad U : \text{energía potencial electrostática}$$

Capacitancia

$$q = CV \quad C : \text{capacitancia}$$

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{Capacitor de placas paralelas}$$

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad \epsilon = k\epsilon_0 \quad k : \text{Constante dieléctrica}$$

$$C = k\epsilon_0 \frac{2\pi l}{\ln(b/a)} \quad \text{Capacitor cilíndrico}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV \quad U : \text{energía almacenada en un capacitor}$$

$$u = \frac{1}{2} k\epsilon_0 E^2 \quad u : \text{densidad de energía}$$

Corriente, resistencia y fuerza electromagnética

$$i = \frac{dq}{dt} \quad i: \text{corriente eléctrica}$$

$$i = nqvA$$

$$j = \frac{i}{A} = \sum_i n_i q_i v_i \quad j: \text{densidad de corriente, } A: \text{área}$$

$$\rho = \frac{E}{j} \quad \rho: \text{resistividad}$$

$$R = \frac{V}{i} = \rho \frac{l}{A} \quad R: \text{resistencia}$$

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta t) \quad \text{Variación de } R \text{ con la temperatura}$$

$$V_{ab} = \sum IR - \sum \varepsilon$$

$$\sum i_{ent} = \sum i_{sal}$$

$$\sum \text{Elevaciones de potencial} = \sum \text{Caídas de potencial} \quad \sum v_i = 0$$

$$P = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \quad P: \text{potencia eléctrica}$$

Magnetismo

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{v}: \text{velocidad}, \quad \vec{B}: \text{campo magnético}$$

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \quad \vec{l}: \text{elemento de longitud}$$

$$\tau = NiAB\sin\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad r: \text{distancia}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \quad N: \text{número de vueltas}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\theta d\theta \quad r: \text{radio}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \varepsilon: \text{fuerza electromagnética}$$

$$\varepsilon = -vBl$$

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Equivalencias

Longitud

	m	in	ft	mi
1 m	1	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 in	2.54×10^{-2}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 ft	0.3048	12	1	1.894×10^{-4}
1 mi	1609	6.336×10^4	5280	1

Masa

	Kg	uma	lb
1 kg	1	6.022×10^{26}	2.205
1 uma	1.661×10^{-27}	1	3.662×10^{-27}
1 lb	0.4536	2.732×10^{26}	1

Fuerza

	dina	N	lb _f	kg _f
1 dina	1	10^{-5}	2.248×10^{-6}	1.020×10^{-6}
1 N	10^5	1	0.2248	0.1020
1 lb _f	4.448×10^5	4.448	1	0.4536
1 kg _f	9.807×10^5	9.807	2.205	1

Presión

	atm	mm Hg	Pa	bar
1 atm	1	760	1.013×10^5	1.013
1 mm Hg	1.316×10^{-3}	1	133.3	1.333×10^{-3}
1 Pa	9.869×10^{-6}	7.501×10^{-3}	1	10^{-5}
1 bar	0.987	750.062	10^5	1

Energía, trabajo, calor

	Btu	HP·h	J	cal	kWh	eV
1 Btu	1	3.929×10^{-4}	1055	252	2.930×10^{-4}	6.585×10^{21}
1 HP·h	2545	1	2.385×10^6	6.413×10^5	0.7457	1.676×10^{25}
1 J	9.481×10^{-4}	3.725×10^{-7}	1	0.2389	2.778×10^{-7}	6.242×10^{18}
1 cal	3.969×10^{-3}	1.560×10^{-6}	4.186	1	1.163×10^{-6}	2.613×10^{19}
1 kWh	3413	1.341	3.600×10^6	8.600×10^5	1	2.247×10^{25}
1 eV	1.519×10^{-22}	5.967×10^{-26}	1.602×10^{-19}	3.827×10^{-20}	4.450×10^{-26}	1

Campo magnético

	gauss	T
1 gauss	1	10^{-4}
1 tesla	10^4	1

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Flujo magnético

	maxwell	Wb
1 maxwell	1	10^{-8}
1 weber	10^8	1

$$1 \text{ rpm} = 6.283 \text{ rad/min}$$

Química

Constantes

Carga del electrón = $-1.6021 \times 10^{-19} \text{ C}$
Carga del protón = $1.6021 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masa electrón = $9.1094 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa protón = $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Constante de Boltzmann = $1.3805 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Constante de Planck = $6.6261 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Avogadro = $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante gravitacional $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$
Constante dieléctrica $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Constante de permeabilidad = $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} = 1.2566 \times 10^{-6} \text{ H/m}$
Electrón-volt (eV) = $1.6021 \times 10^{-19} \text{ J}$
Radio medio de la Tierra = $6.378 \times 10^6 \text{ m}$
Distancia de la Tierra a la Luna = $3.844 \times 10^8 \text{ m}$
Masa de la Tierra = $5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$
Masa de la Luna = $7.349 \times 10^{22} \text{ kg}$
Aceleración en la superficie de la:
 Luna 1.62 m/s^2
 Tierra $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
 $\rho_{\text{Cu}} = 1.71 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
 $\rho_{\text{Al}} = 2.82 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
 $\rho_{\text{Ag}} = 1.62 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
 $\rho_{\text{Fe}} = 9.71 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$
 $\delta_{\text{Cu}} = 8.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
 $\delta_{\text{Al}} = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
 $\delta_{\text{madera}} = 0.6 - 0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

**Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

grupo 1 II III IV V VI VII 18 I II III IV V VI VII VIII																	
1 1.00797 1 H Hidrógeno 2 4.0026 0 He Helio																	
3 6.941 1 Li Litio 4 9.0122 2 Be Berilio																	
11 22.9898 1 Na Sodio 12 24.305 2 Mg Magnesio																	
19 39.098 1 K Potasio 20 40.08 2 Ca Calcio																	
21 44.956 3 Sc Escandio 22 47.90 3 Ti Titanio 23 50.942 3 V Vanadio 24 51.996 3 Cr Cromo 25 54.938 3 Mn Manganeso 26 55.847 3 Fe Hierro 27 58.93 3 Co Cobalto 28 58.71 3 Ni Níquel 29 63.54 3 Cu Cobre 30 65.37 3 Zn Cinc 31 69.72 3 Ga Galio 32 72.59 4 Ge Germanio 33 74.922 4 As Arsénico 34 78.96 4 Se Selenio 35 79.909 4 Br Bromo 36 83.80 0 Kr Criptón																	
37 85.47 1 Rb Rubidio 38 87.62 2 Sr Estroncio 39 89.906 3 Y Itrio 40 91.22 3 Zr Circonio 41 92.906 3 Nb Niobio 42 95.94 3 Mo Molibdeno 43 95.94 3 Tc Tecnecio 44 101.07 3 Ru Rutenio 45 102.905 3 Rh Rodio 46 106.4 3 Pd Paladio 47 107.87 3 Ag Plata 48 112.40 3 Cd Cadmio 49 114.82 3 In Indio 50 118.69 3 Sn Estañio 51 121.75 3 Sb Antimonio 52 127.60 3 Te Telurio 53 126.904 3 I Yodo 54 131.30 3 Xe Xenón																	
55 132.905 1 Cs Cesio 56 137.34 2 Ba Bario 57 140.12 3 La Lantano 58 140.907 3 Ce Cerio 59 140.907 3 Pr Praseodimio 60 144.24 3 Nd Neodimio 61 147.91 3 Pm Promecio 62 150.35 3 Sm Samario 63 151.96 3 Eu Europio 64 157.25 3 Gd Gadolinio 65 158.924 3 Tb Terbio 66 162.50 3 Dy Disprobio 67 164.930 3 Ho Holmio 68 167.26 3 Er Erbio 69 168.934 3 Tm Tulio 70 173.04 3 Yb Iterbio																	
87 223 1 Fr Francio 88 226 2 Ra Radio 89 227 3 Ac Actinio 90 232.038 3 Th Torio 91 231 4 Pa Protactinio 92 238.0289 3 U Uranio 93 237 3 Np Neptunio 94 244 3 Pu Plutonio 95 243 3 Am Americio 96 247 3 Cm Curio 97 247 3 Bk Berkelio 98 251 3 Cf Californio 99 254 3 Es Einsteinio 100 257 3 Fm Fermio 101 258 3 Md Mendelevio 102 259 3 No Nobelio																	

Referencias:

No metales	Alcalinos	Alcalinotérreos	Metales de transición	Metales del bloque p	Metales	Halógenos	Gases nobles
------------	-----------	-----------------	-----------------------	----------------------	---------	-----------	--------------

(1) base en peso atómico del carbono 12

() Indica el más estable o el isótopo más conocido

El autor original del trabajo es el Ingeniero Alejandro Segade Reyes, y lo publica bajo licencia GNU

Análisis de circuitos eléctricos

Ley de Ohm con fasores

$$I = \frac{V}{Z}$$

donde:

I = Corriente [A]

V= Voltaje [V]

Z = Impedancia [Ω]

Voltaje y corriente en elementos reactivos (con condiciones iniciales iguales a cero)

Capacitor

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \qquad i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Inductor libre de acoplamientos magnéticos

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt \qquad v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Inductor con acoplamientos magnéticos

$$i_k(t) = \sum_{l=1}^N \Gamma_{kl} \int v_l(t) dt$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$v_k(t) = \sum_{l=1}^N L_{kl} \frac{di_l(t)}{dt}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$\Gamma_{kl} = \frac{\text{cof} L_{lk}}{\Delta L_{kl}}$$

donde:

L_{kl} = Inductancia mutua entre el inductor k y el inductor l

Γ_{kl} = Invertancia mutua entre los inductores k y l

Cof L_{lk} = Cofactor del la inductancia mutua L_{lk}

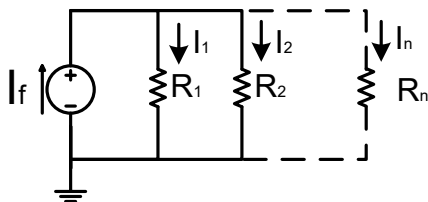
ΔL_{kl} = Determinante del sistema de inductancias propias y mutuas

k = k-ésimo inductor

N = número total de inductores que se encuentren acoplados

Divisor de corriente

Si el circuito está integrado por n elementos:



$$I_X = I_f \frac{R_{Total\ paralelo}}{R_X}$$

$$I_X = I_f \frac{Z_{Total\ paralelo}}{Z_X}$$

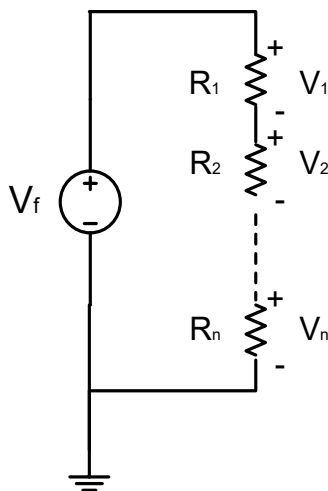
donde:

I_x = Corriente en el resistor o impedancia de interés

R_x = Resistor de interés

Z_x = Impedancia de interés

Divisor de voltaje



$$V_X = V_f \frac{R_X}{R_{Total\ serie}}$$

Leyes de Kirchhoff

Ley de Kirchhoff de voltaje

Ley de Kirchhoff de corriente

$$\sum_{k=1}^{N_e} V_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N_i} I_k = 0$$

donde:

N_e = Número de caídas o elevaciones de tensión en una malla cerrada

N_i = Número de corrientes que entran o salen a un nodo

K = k-ésimo elemento

Potencia

Potencia activa

$$P = VI \cos \theta \quad [W]$$

$$P = \frac{V^2}{|Z|} \cos \theta \quad [W]$$

$$P = I^2 |Z| \cos \theta \quad [W]$$

Potencia reactiva

$$Q = VI \sin \theta \quad [VAR]$$

$$Q = \frac{V^2}{|Z|} \sin \theta \quad [VAR]$$

$$Q = I^2 |Z| \sin \theta \quad [VAR]$$

Potencia compleja

$$S = VI^* \quad [VA]$$

Factor de potencia

$$f_p = \cos(\theta)$$

Resonancia RLC serie

Frecuencia de resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Frecuencias de corte

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \right]$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \right]$$

Ancho de banda

$$BW = f_2 - f_1$$

$$BW = \frac{R}{L}$$

Factor de calidad

$$Q = \frac{\omega_0}{BW}$$

$$Q_s = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Resonancia RLC paralelo

Frecuencia de resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Frecuencias de corte

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \right]$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \right]$$

Ancho de banda

$$BW = f_2 - f_1$$

$$BW = \frac{1}{RC}$$

Factor de calidad

$$Q = \frac{\omega_0}{BW}$$

$$Q_p = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Circuitos excitados con señales senoidales de diferentes frecuencias

Sea $v(t)$ una función de la forma:

$$v(t) = V_o + V_1 \text{sen}(\omega_1 t + \alpha_1) + V_2 \text{sen}(\omega_2 t + \alpha_2) + \dots + V_n \text{sen}(\omega_n t + \alpha_n)$$

Entonces, el voltaje eficaz (RMS) en una red excitada con una tensión $v(t)$ es:

$$V_{rms} = \sqrt{V_o^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n V_k^2 \right)}$$

donde $k = 1, 2, 3, \dots, n$

Sea $i(t)$ una función de la forma:

$$i(t) = I_o + I_1 \text{sen}(\omega_1 t + \beta_1) + I_2 \text{sen}(\omega_2 t + \beta_2) + \dots + I_n \text{sen}(\omega_n t + \beta_n)$$

La corriente eficaz (RMS) en una red en la que circula una corriente $i(t)$ es:

$$I_{rms} = \sqrt{I_o^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n I_k^2 \right)}$$

donde $k = 1, 2, 3, \dots, n$

La potencia media es:

$$P = V_o I_o + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k I_k \cos(\alpha_k - \beta_k)$$

donde $k = 1, 2, 3, \dots, n$

Impedancia y admitancia de una red pasiva de dos terminales

Impedancia

$$Z_t = \frac{\Delta Z_{kl}}{\text{cof} Z_{kk}}$$

donde:

ΔZ_{kl} = Determinante de las impedancias propias y mutuas entre mallas

$\text{cof} Z_{kk}$ = Cofactor de la impedancia de malla donde están las dos terminales

Admitancia

$$Y_t = \frac{\Delta Y_{kl}}{\text{cof} Y_{kk}}$$

donde:

ΔY_{kl} = Determinante de las admitancias propias y mutuas entre nodos

$\text{cof} Y_{kk}$ = Cofactor de la admitancia de nodo donde están las dos terminales

Teoremas de redes

Teorema de Thevenin

Pasos para obtener el circuito equivalente de Thevenin

- Identificar los nodos A y B dentro del circuito donde se desea encontrar el circuito equivalente de Thevenin.
- Desconectar del circuito original el circuito del que se desea obtener su equivalente. Entre los nodos A y B debe considerarse un circuito abierto.
- Calcular el voltaje en los puntos A y B (V_{th}).
- Poner en cortocircuito los nodos A y B y calcular la corriente de cortocircuito (I_{cc}).
- Calcular la impedancia de Thevenin como:

$$Z_{th} = \frac{V_{th}}{I_{cc}}$$

- Construir el circuito equivalente de Thevenin en los nodos A y B con V_{th} en serie con Z_{th} .
- El teorema de Thevenin se puede aplicar para redes que cuenten con acoplamientos magnéticos, siempre y cuando, éste no se encuentre dentro del circuito al que se desea encontrar el equivalente.

Teorema de Norton

Pasos para obtener el circuito equivalente de Norton

- Identificar los nodos A y B dentro del circuito donde se desea encontrar el circuito equivalente de Norton.
- Desconectar del circuito original el circuito del que se desea obtener su equivalente. Entre los nodos A y B debe considerarse un cortocircuito.
- Calcular la corriente de Norton que circula entre los nodos A y B (I_N).
- Considerar entre los nodos A y B un circuito abierto y calcular el voltaje de circuito abierto (V_{ca}).
- Calcular la impedancia de Norton como:

$$Z_N = \frac{V_{ca}}{I_N}$$

- Construir el circuito equivalente de Norton.
- El teorema de Norton se puede aplicar para redes que cuenten con acoplamientos magnéticos, siempre y cuando, éste no se encuentre dentro del circuito al que se desea encontrar el equivalente.

Teorema de reciprocidad

Si se tiene un circuito formado sólo por elementos pasivos, entonces, es posible aplicar el teorema de reciprocidad. Si este circuito tiene una fuente de corriente o voltaje a la entrada, entonces, los pasos para aplicar el teorema de intercambio de fuentes son:

- Identificar los nodos A y B donde se va a aplicar el teorema de reciprocidad.
- Calcular el voltaje o corriente entre A y B.
- Desconectar la fuente de entrada y conectarla entre A y B.
- Si la fuente es de voltaje, la entrada se cortocircuita. Si la fuente es de corriente, la entrada se pone en circuito abierto.
- La corriente o el voltaje, según sea el caso, a la entrada del circuito es la misma que en el caso original.

Teorema de superposición

Si el circuito es lineal es posible aplicar este teorema. Los pasos necesarios son:

- Identificar el número de fuentes que se encuentran en el circuito.
- Seleccionar una de ellas y para el resto de las fuentes debe considerarse lo siguiente: si es una fuente de voltaje, ésta debe substituirse por un cortocircuito y si es una fuente de corriente, ésta debe substituirse por un circuito abierto.
- Obtener los voltajes y corrientes en el circuito.
- Repetir el proceso según el número de fuentes que haya en el circuito seleccionando en cada iteración una fuente diferente.
- Sumar los voltajes y corrientes obtenidos para cada una de las fuentes dadas en el circuito.

Parámetros de dos puertos

Parámetros de impedancias(Z)

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

Los parámetros de impedancias están dados por:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{Impedancia de entrada}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{Impedancia de transferencia directa}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{Impedancia de transferencia inversa}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{Impedancia de salida}$$

Parámetros de admitancias (Y)

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad \text{Admitancia de entrada}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad \text{Admitancia de transferencia directa}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad \text{Admitancia de transferencia inversa}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad \text{Admitancia de salida}$$

Parámetros híbridos directos

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Impedancia de entrada con terminales de salida en cortocircuito

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

Ganancia en corriente

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Inverso de la ganancia de voltaje

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

Admitancia de salida con terminales de entrada abiertas

Parámetros híbridos inversos

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0}$$

Admitancia de entrada con terminales de salida abiertas

$$g_{21} = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0}$$

Ganancia en voltaje

$$g_{12} = \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

Inverso de la ganancia corriente

$$g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

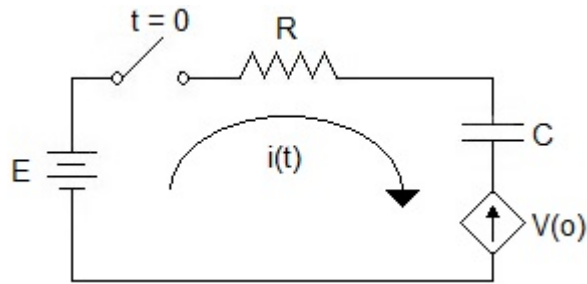
Impedancia de salida con terminales de entrada en cortocircuito

Respuesta transitoria

Condiciones iniciales y finales de los elementos

Elemento	Circuito equivalente inicial para $t < 0$		Circuito equivalente para $t \gg 0$
	Cargado	Descargado	
R			Resistencia
L	$i_L(0^-) = i_L(0^+)$ Fuente ideal de corriente	$i_L(0^+) = 0$ Circuito abierto	Cortocircuito
C	$v_C(0^-) = v_C(0^+)$ Fuente ideal de Voltaje	$V_C(0^+) = 0$ Cortocircuito	Circuito abierto

Respuesta total en circuitos RC



Para la corriente

$$i(t) = \frac{(E - v_c(0))e^{\frac{-t}{RC}}}{R} \quad [A]$$

Para el capacitor

$$v_C(t) = E + (v_C(0) - E)e^{\frac{-t}{RC}} \quad [V]$$

Para la resistencia

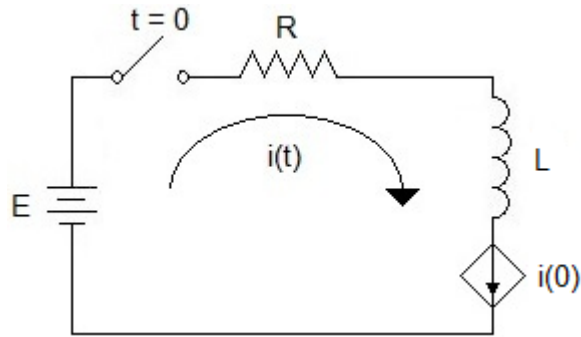
$$v_R(t) = Ri(t) = (E - v_c(0))e^{\frac{-t}{RC}} \quad [V]$$

Constante de tiempo

$$\tau = RC \quad [s]$$

donde $v_c(0)$ es el voltaje inicial en el capacitor.

Respuesta total en circuitos RL



Para la corriente

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) + i(0) e^{-\frac{Rt}{L}} \quad [A]$$

Para el resistor

$$v_R(t) = Ri(t) = E \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) + Ri(0) e^{-\frac{Rt}{L}} \quad [V]$$

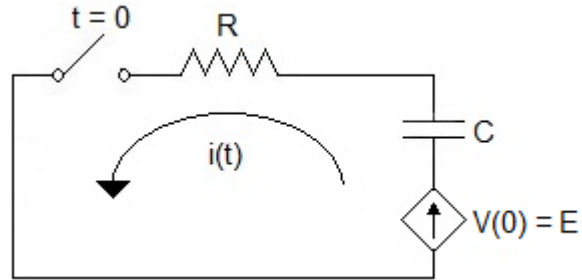
Para el inductor

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = E e^{-\frac{Rt}{L}} - Ri(0) e^{-\frac{Rt}{L}} \quad [V]$$

La constante de tiempo es:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad [s]$$

Respuesta libre en un circuito RC

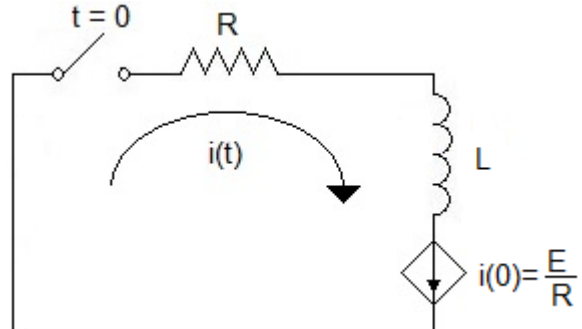


$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ [A]}$$

$$v_R = Ri(t) = E e^{-\frac{t}{RC}} \text{ [V]}$$

$$v_C(t) = E - v_R(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \text{ [V]}$$

Respuesta libre en un circuito RL

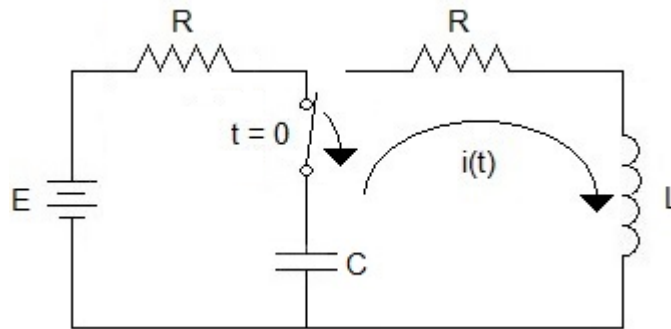


$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \text{ [A]}$$

$$v_R(t) = E e^{-\frac{Rt}{L}} \text{ [V]}$$

$$v_L(t) = -E e^{-\frac{Rt}{L}} \text{ [V]}$$

Respuesta libre de un circuito RLC



Solución General para $i(t)$

$$i(t) = k_1 e^{D_1 t} + k_2 e^{D_2 t}$$

donde D_1 y D_2 son las raíces:

$$D_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$D_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

$v_c(0^-) = \text{Voltaje inicial en } C$

Caso I: $(\alpha^2 < \omega^2)$

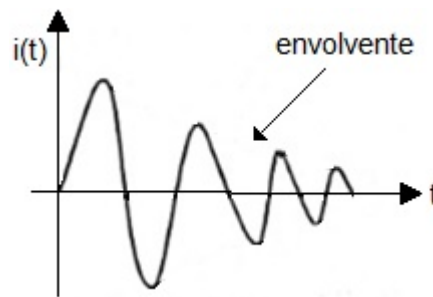
Respuesta bajo amortiguada (raíces complejas conjugadas)

$$i(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\beta)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\beta)t}$$

$$k_1 = -k_2$$

$$k = \frac{v_c(0^-)}{2\beta L}$$

$$i(t) = \frac{v_c(0^-)}{\beta L} e^{-\alpha t} \text{sen}(\beta t) \text{ [A]}$$



Caso II: ($\alpha^2 = \omega^2$)

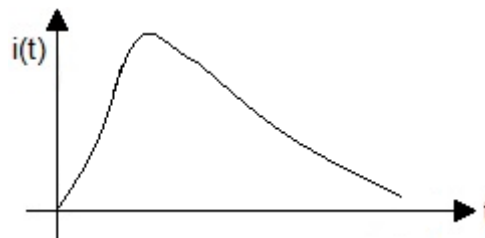
Respuesta críticamente amortiguada (raíces reales repetidas)

$$i(t) = k_1 e^{-\alpha t} + k_2 t e^{-\alpha t}$$

$$k_1 = 0$$

$$k_2 = \frac{v_c(0^-)}{L}$$

$$i(t) = \frac{v_c(0^-)}{L} t e^{-\alpha t} \text{ [A]}$$



Caso III: ($\alpha^2 > \omega^2$)

Respuesta sobreamortiguada (raíces reales diferentes)

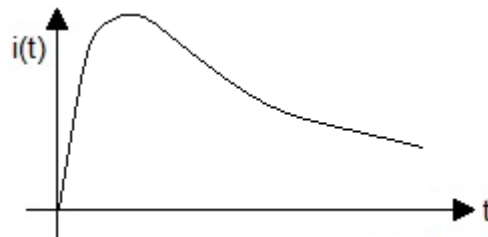
$$i(t) = k_1 e^{(-\alpha+\beta)t} + k_2 e^{(-\alpha-\beta)t}$$

$$k_1 = -k_2$$

$$k_1 = \frac{v_c(0^-)}{2\beta L}$$

$$k_2 = -\frac{v_c(0^-)}{2\beta L}$$

$$i(t) = \frac{v_c(0^-)}{\beta L} e^{-\alpha t} \sinh(\beta t)$$



Función de transferencia

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad \text{Relación de voltajes}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)} \quad \text{Impedancia de transferencia}$$

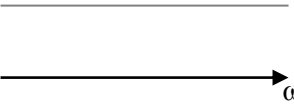
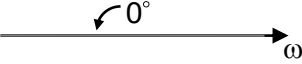
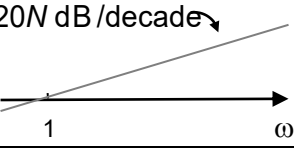
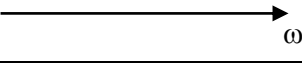
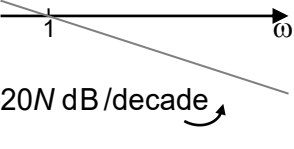
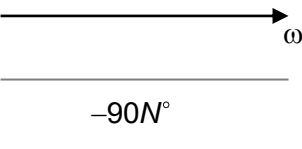
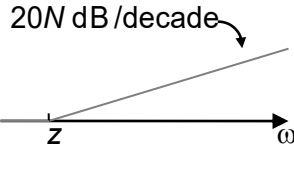
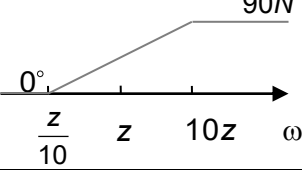
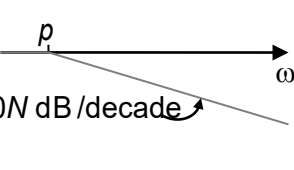
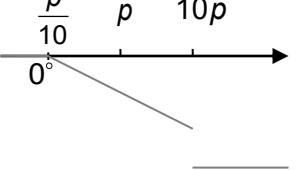
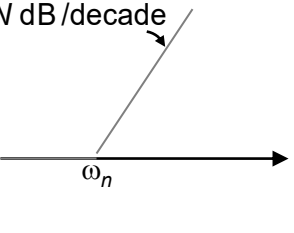
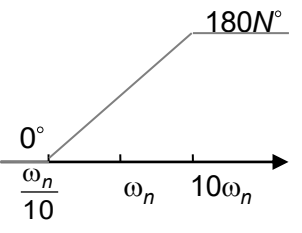
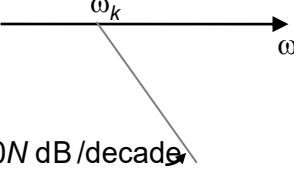
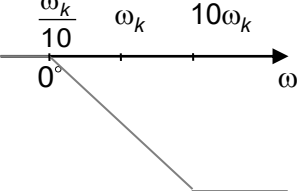
$$H(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} \quad \text{Relación de corrientes}$$

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)} \quad \text{Admitancia de transferencia}$$

donde $I_o(s)$ y $V_o(s)$ son la corriente y el voltaje en la salida, respectivamente. $I_i(s)$ y $V_i(s)$ son la corriente y el voltaje en la entrada, respectivamente.

Diagramas de Bode asintóticos

Summary of Bode straight-line magnitude and phase plots.

Factor	Magnitude	Phase
K	$20\log_{10} K$ 	0° 
$(j\omega)^N$	$20N \text{ dB/decade}$ 	$90N^\circ$ 
$\frac{1}{(j\omega)^N}$	$-20N \text{ dB/decade}$ 	$-90N^\circ$ 
$\left(1 + \frac{j\omega}{z}\right)^N$	$20N \text{ dB/decade}$ 	0° to $90N^\circ$ 
$\frac{1}{(1 + j\omega/p)^N}$	$-20N \text{ dB/decade}$ 	0° to $-90N^\circ$ 
$\left[1 + \frac{2j\omega\zeta}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^N$	$40N \text{ dB/decade}$ 	0° to $180N^\circ$ 
$\frac{1}{\left[1 + 2j\omega\zeta/\omega_k + (j\omega/\omega_k)^2\right]^N}$	$-40N \text{ dB/decade}$ 	0° to $-180N^\circ$ 

Sistemas acoplados

Factor de acoplamiento

$$K_{kl} = \frac{L_{lk}}{\sqrt{L_{kk} \cdot L_{ll}}}$$

Inductancia mutua

$$L_{kl} = K_{kl} \sqrt{L_{kk} \cdot L_{ll}}$$

donde:

K_{kl} = factor de acoplamiento entre los inductores k y l

L_{kl} = inductancia mutua entre los inductores k y l

L_{ll} = inductancia propia del inductor l

L_{kk} = inductancia propia del inductor k

Sistemas trifásicos

Resistencia y reactancia en serie

La impedancia Z de una carga reactiva que está formada por una resistencia R y una reactancia en serie es:

$$Z = R + jX$$

Convirtiéndola a su admitancia equivalente Y :

$$Y = \frac{R - jX}{|Z|^2}$$

donde:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Según la ley de Ohm:

$$V = ZI$$

y

$$I = YV$$

Entonces:

$$I = \frac{VR - jVX}{|Z|^2}$$

$$I = \frac{VR}{|Z|^2} - j \frac{VX}{|Z|^2}$$

$$I = I_P - jI_Q$$

donde I_P e I_Q son las corrientes activa y reactiva, respectivamente.

La corriente activa I_P y la corriente reactiva I_Q son:

$$I_P = \frac{VR}{|Z|^2} = |I| \cos \theta$$

$$I_Q = \frac{VX}{|Z|^2} = |I| \sin \theta$$

donde θ está dada por:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{P}{|S|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{Q}{|S|}\right)$$

Si se aplica una tensión V , a una carga reactiva Z y la corriente I que circula en el circuito, entonces, la potencia compleja S , potencia activa P y potencia reactiva Q están dadas por:

$$S = VI^* = \frac{ZV^2}{|Z|^2} = |I|^2 Z$$

$$P = VI_P = \frac{V^2 R}{|Z|^2}$$

$$Q = VI_Q = \frac{V^2 X}{|Z|^2}$$

El factor de potencia (fp) y el factor reactivo (fr) son:

$$fp = \cos(\theta) = \frac{R}{|Z|}$$

$$fr = \sin(\theta) = \frac{X}{|Z|}$$

Potencia trifásica

Para una carga balanceada conectada en estrella con una tensión de línea $V_{línea}$ y una corriente de línea $I_{línea}$:

$$V_{estrella} = \frac{V_{línea}}{\sqrt{3}}$$

$$I_{estrella} = I_{línea}$$

$$Z_{estrella} = \frac{V_{estrella}}{I_{estrella}} = \frac{V_{línea}}{\sqrt{3}I_{estrella}}$$

$$S_{estrella} = 3V_{estrella}I_{estrella} = \sqrt{3}V_{línea}I_{línea} = \frac{V_{línea}^2}{Z_{estrella}} = 3I_{línea}^2 Z_{estrella}$$

Para una carga balanceada conectada en delta con una tensión de línea $V_{línea}$ y una corriente de línea $I_{línea}$:

$$V_{delta} = V_{línea}$$

$$I_{delta} = \frac{I_{línea}}{\sqrt{3}}$$

$$Z_{delta} = \frac{V_{delta}}{I_{delta}} = \sqrt{3} \frac{V_{línea}}{I_{línea}}$$

$$S_{delta} = 3V_{delta}I_{delta} = \frac{3V_{línea}^2}{Z_{delta}} = I_{línea}^2 Z_{delta}$$

Note que la equivalencia entre cargas balanceadas conectadas en estrella y delta es:

$$Z_{delta} = 3Z_{estrella}$$

Electrónica analógica

Diodo de propósito general

Ecuación de Shockley del diodo

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{q \cdot V_D}{n \cdot k \cdot T}} - 1 \right)$$

donde:

I_D = Corriente a través del diodo [A]

I_S = Corriente de saturación (10^{-12} A)

V_D = Voltaje de polarización directo [V]

q = Carga del electrón (1.6022×10^{-19}) [C]

n = Constante para Ge = 1 y para Si = 1.1 y 1.8

k = Constante de Boltzman 1.3806×10^{-23} [J/K]

T = Temperatura absoluta [K]

Diodo Zener

$$\text{Regulación de línea} = \frac{R_z}{R_z + R_s}$$

$$\text{Regulación de carga} = -\left(R_z \parallel \dots \right)$$

$$\text{Regulación Zener} = \frac{R_s}{R_z + R_s}$$

$$V_{zo} = V_z - (R_z \cdot I_z)$$

Para $R_L = 0$

$$I_z = \frac{(V_s - V_{zo})}{(R_z + R_s)}$$

El voltaje de salida está dado por:

$$V_o = V_{zo} + (R_z \cdot I_z)$$

$$R_s = \frac{V_s - V_{zo} - R_z \cdot I_z}{I_z + I_L}$$

En caso de conocer los rangos de V_S e I_L

$$R_S = \frac{V_{S(\max)} - V_{zo} - R_z \cdot I_{z(\max)}}{I_{z(\max)} + I_{L(\min)}}$$

$$R_S = \frac{V_{S(\min)} - V_{zo} - R_z \cdot I_{z(\min)}}{I_{z(\min)} + I_{L(\max)}}$$

$$P_z = V_z \cdot I_z$$

Rectificadores de media onda y onda completa (fuentes de alimentación)

	Rectificador de media onda	Rectificador de onda completa
Voltaje de rizo pico-pico	$V_{r(pp)} = \frac{V_m}{f \cdot R_L \cdot C}$	$V_{r(pp)} = \frac{V_m}{2f \cdot R_L \cdot C}$
Voltaje de salida V_O	$V_{O(cd)} = \frac{V_m (2f \cdot R_L \cdot C - 1)}{2f \cdot R_L \cdot C}$	$V_{O(cd)} = \frac{V_m (4f \cdot R_L \cdot C - 1)}{4f \cdot R_L \cdot C}$
Voltaje rizo rms	$V_{r(rms)} = \frac{V_m}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot f \cdot R_L \cdot C}$	$V_{r(rms)} = \frac{V_m}{4 \cdot \sqrt{2} \cdot f \cdot R_L \cdot C}$
Factor de rizo	$FR = \frac{1}{\sqrt{2} (2f \cdot R_L \cdot C - 1)}$	$FR = \frac{1}{\sqrt{2} (4f \cdot R_L \cdot C - 1)}$
Cálculo del capacitor	$C = \frac{1}{2f \cdot R_L} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot RF} \right)$	$C = \frac{1}{4f \cdot R_L} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot RF} \right)$
Relación V_{rms} y V_L	$\frac{V_{rms}}{V_L} \approx \frac{1}{420} \approx 0.0024$	

Regulación de voltaje

$$Regulación\ línea = \frac{\Delta V_{sal}}{\Delta V_{ent}} \cdot 100\%$$

$$Regulación\ carga = \frac{V_{NL} - V_{FL}}{V_{FL}}$$

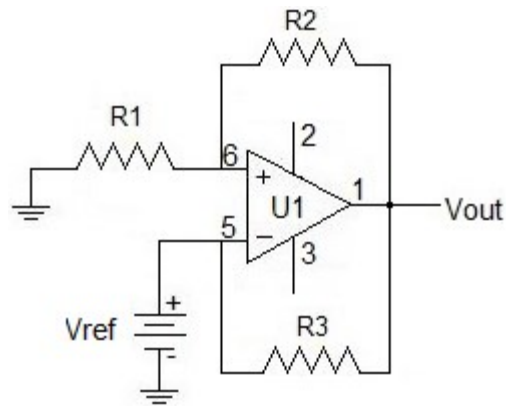
$$Regulación\ de\ carga = \frac{R_{sal}}{R_{FL}} \cdot 100$$

donde:

V_{NL} = Voltaje sin carga

V_{FL} = Voltaje a plena carga

Regulador básico en serie con OA



$$V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) V_{ref}$$

Reguladores en paralelo lineales básico

$$I_{L(max)} = \frac{V_{in}}{R_L}$$

Reguladores de conmutación básicos

$$V_o = \left(\frac{t_{off}}{T} \right) V_{in}$$

donde:

$$T = t_{in} + t_{off}$$

Reguladores de voltaje en circuito integrado

$$V_{sal} = V_{ref} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + I_{ADJ} R_2$$

$$I_{L(max)} = \frac{V_{sal}}{R_{1_1}} + I_G$$

Transistor de unión bipolar (BJT)
Parámetros de corriente directa

$$\beta_{cd} = \frac{I_c}{I_B}$$

$$\alpha_{cd} = \frac{I_c}{I_E}$$

donde:

β_{cd} =Ganancia en corriente en CD

α_{cd} =Factor de amplificación de corriente en polarización directa

I_c =Corriente de colector

I_B =Corriente de base

I_E =Corriente de emisor

Corrientes en un transistor

$$I_E = I_C + I_B$$

Voltaje entre la base y el emisor

$$V_{BE} \cong 0.7 \text{ V}$$

Corriente en la base

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B}$$

donde:

V_{BB} = Voltaje de polarización en la base

V_{BE} = Voltaje base-emisor

R_B = Resistencia de base

Voltaje en el colector con respecto al emisor

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C$$

donde:

V_{CC} = Voltaje de polarización en el colector

V_{CE} = Voltaje colector-emisor

R_C = Resistencia de colector

Voltaje en el colector con respecto a la base

$$V_{CB} = V_{CE} - V_{BE}$$

donde:

V_{CB} = Voltaje colector-base

V_{CE} = Voltaje colector-emisor

R_C = Resistencia de colector

Condición de corte

$$V_{CE(corte)} = V_{CC}$$

Corriente de saturación en el colector

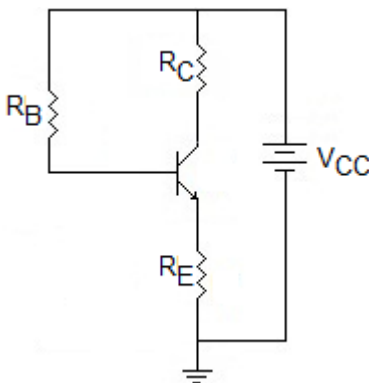
$$I_{C(SAT)} = \frac{V_{CC} - V_{CE(SAT)}}{R_C}$$

Corriente de base mínima para saturación

$$I_{B(min)} = \frac{I_{C(SAT)}}{\beta_{cd}}$$

Polarización

Polarización con realimentación del emisor



$$V_B = I_E R_E + V_{BE}$$

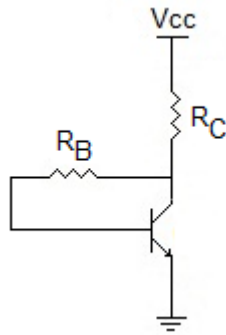
$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

$$V_E = V_B - V_{BE}$$

$$I_E = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_E + (R_B / \beta_{cd})}$$

$$I_C \cong I_E$$

Polarización con realimentación del colector



$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

$$V_B = V_{BE}$$

$$V_E = 0 \text{ V}$$

$$I_C \cong \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_C}$$

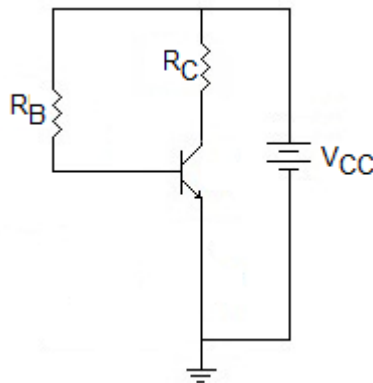
$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_C + \frac{R_B}{\beta_{cd}}}$$

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C$$

$$I_E \cong I_C$$

$$I_B = \frac{V_C - V_{BE}}{R_B}$$

Polarización de base



$$V_B = V_{BE}$$

$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

$$V_E = 0 \text{ V}$$

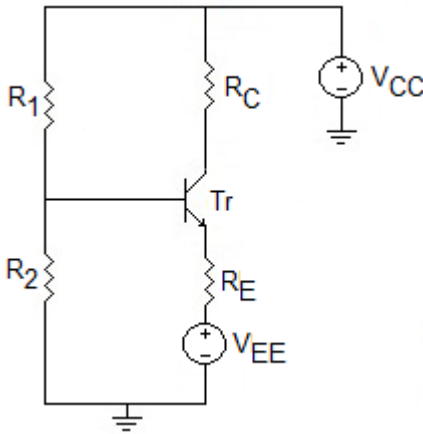
$$I_C = \beta_{cd} \left(\frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} \right)$$

$$I_E \cong I_C$$

$$I_B = \frac{V_C - V_{BE}}{R_B}$$

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C$$

Polarización del emisor



$$V_B = V_E + V_{BE}$$

$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

$$V_E = V_{EE} + I_E R_E$$

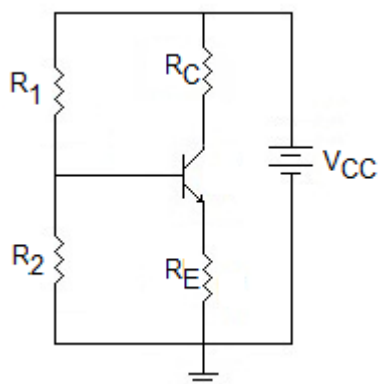
$$I_E \cong \frac{-V_{EE} - V_{BE}}{R_E}$$

$$I_E = \frac{-V_{EE} - V_{BE}}{R_E + \frac{R_B}{\beta_{cd}}}$$

$$I_E \cong I_C$$

$$I_B = \frac{V_B}{R_B} \quad I_B = \frac{V_B}{R_B}$$

Polarización con divisor de voltaje



$$V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_{CC}$$

$$V_C = V_{CC} - I_C R_C$$

$$V_E = V_B - V_{BE}$$

$$I_E = \frac{V_E}{R_E}$$

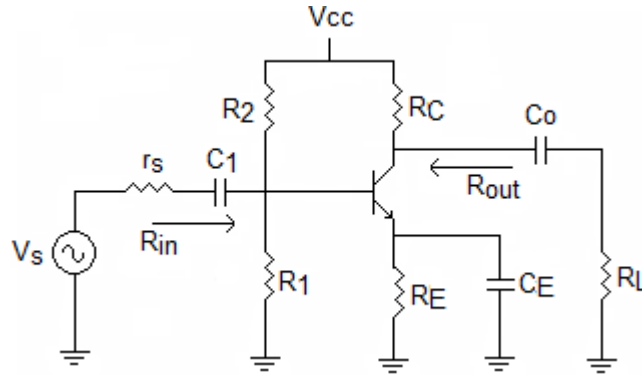
$$I_E \cong I_C$$

$$I_E = \frac{V_{TH} - V_{BE}}{R_E + \frac{R_{TH}}{\beta_{cd}}}$$

$$I_B = \frac{V_B}{\beta_{cd} R_E}$$

Parámetros de corriente alterna (amplificador)

Amplificador emisor común



Ecuaciones considerando el modelo T en señal pequeña de primer orden

$$r'_e = \frac{25mV}{I_E}$$

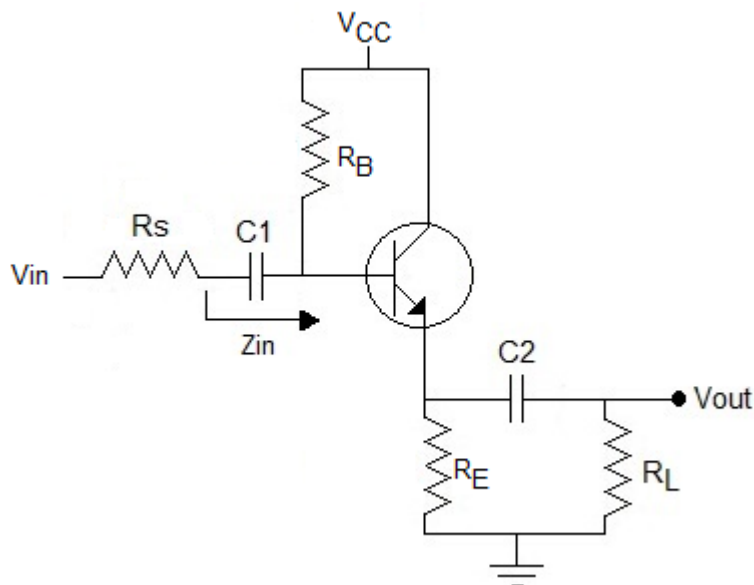
$$R_{in} = R_1 \parallel R_2 \parallel (r'_e + R_E)$$

$$R_{out} \approx R_C \parallel R_L$$

$$A_V = \frac{R_C \parallel R_L}{r'_e}$$

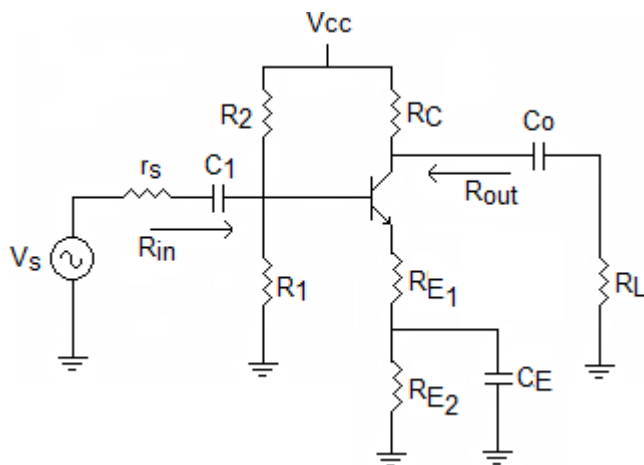
$$A_I = \frac{I_C}{I_{in}}$$

Impedancia de entrada de un seguidor de voltaje



$$Z_{in} = R_{in} = R_B \parallel \left(\beta + 1 \right) \left(R_E \parallel R_L \right)$$

Amplificador con compensación para variación de temperatura

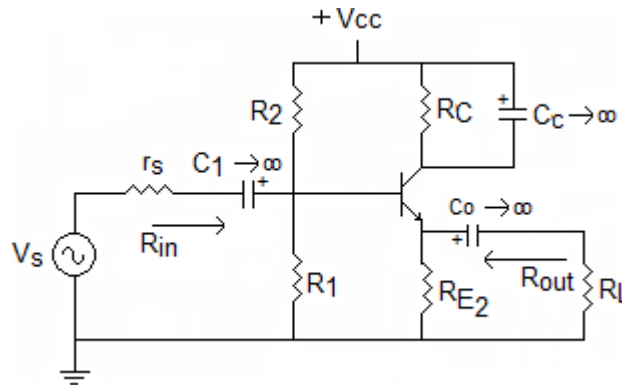


$$A_V \cong \frac{R_C}{R_{E1}}$$

$$R_{out} = R_C$$

$$R_{in} = R_1 \parallel R_2 \parallel \left[\left(\beta + 1 \right) \left(r'_e + R_{E1} \right) \right]$$

Amplificador colector común



Ecuaciones considerando el modelo T en señal pequeña de primer orden

$$r'_e = \frac{25 \text{ mV}}{I_E}$$

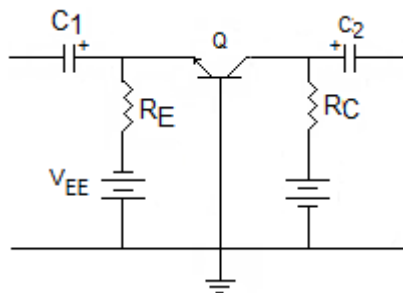
$$R_{in} = R_1 \parallel R_2 \parallel [r'_e + (R_E \parallel R_L + 1)r'_e]$$

$$R_{out} = (R_E \parallel R_L + 1)r'_e$$

$$A_V = \frac{R_E \parallel R_L}{r'_e + R_E \parallel R_L} \approx 1$$

$$A_i = \frac{I_e}{I_{in}}$$

Amplificador en base común



Ecuaciones considerando el modelo T en señal pequeña de primer orden

$$r'_e = \frac{25 \text{ mV}}{I_E}$$

$$R_{ent(emisor)} = r'_e$$

$$R_{sal} \cong R_C$$

$$A_V \cong \frac{R_C}{r'_e}$$

$$A_i \cong 1$$

donde:

r'_e =Resistencia interna de CA en el emisor

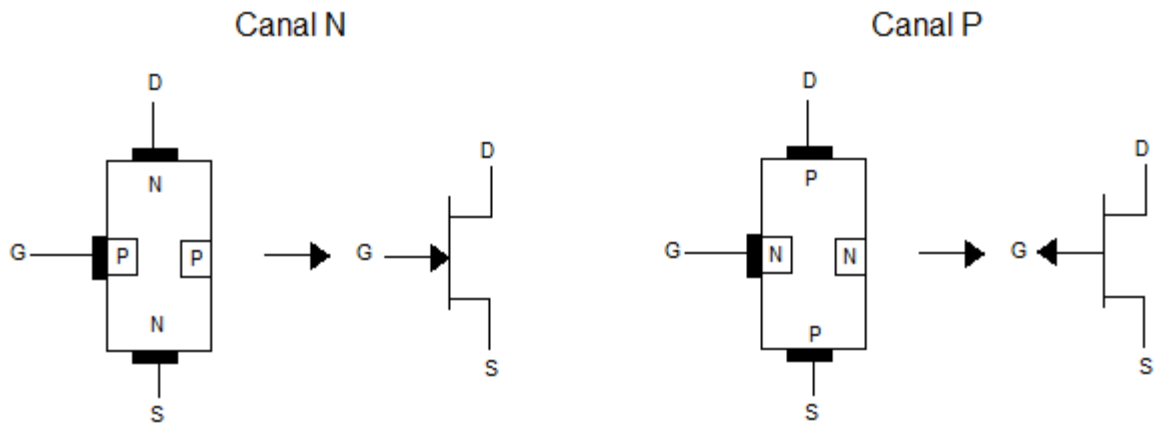
R_{ent} =Resistencia de entrada

R_{sal} =Resistencia de salida

A_V =Ganancia en voltaje

A_i =Ganancia en corriente

Transistor de efecto de campo (FET)



Parámetros de corriente directa

Características de transferencia de un JFET

$$I_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GS(corte)}} \right)^2$$

Transconductancia

$$g_m = g_{m0} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GS(corte)}} \right)^2$$

Transconductancia con $V_{GS} = 0$

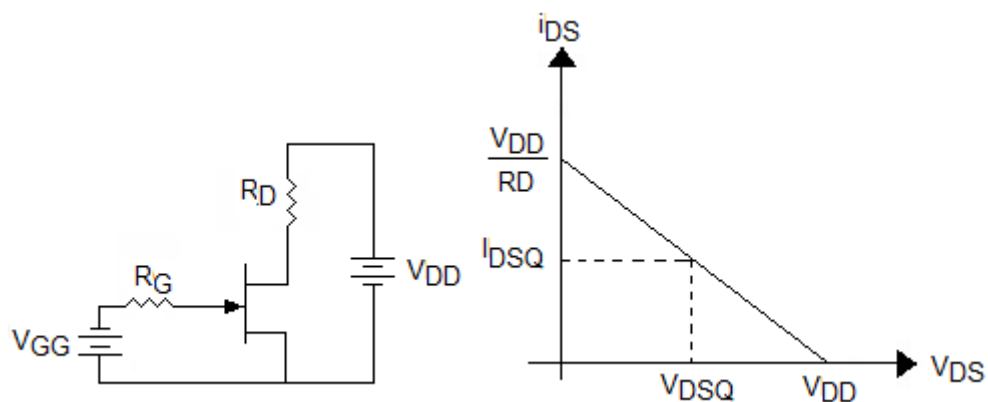
$$g_{m0} = \frac{2I_{DSS}}{|V_{GS(corte)}|}$$

Característica de transferencia de E – MOSFET

$$I_D = K (V_{GS} - V_{GS(umbral)})^2$$

Polarización

Polarización fija

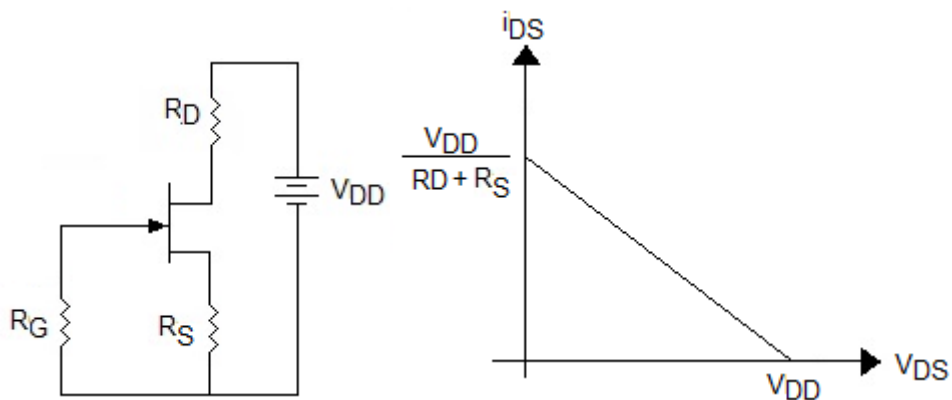


$$V_{GS} = -V_{GG}$$

$$I_{DS} = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_D}$$

$$V_{DD} = I_{DS} + V_{DS}$$

Autopolarización



$$I_{DS} = -\frac{V_{GS}}{R_S}$$

$$R_S = \left| \frac{V_{GS(OFF)}}{I_{DSS}} \right|$$

$$I_{DS} = I_{DSS} \left(1 - \frac{V_{GS}}{V_{GS(OFF)}} \right)^2$$

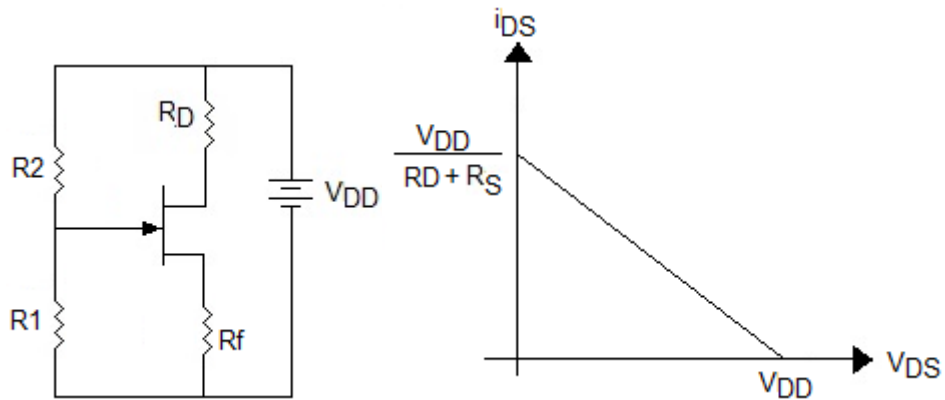
$$I_{DS} = K_1 I_{DSS} \quad |K_1| = 0.382$$

$$V_{GSQ} = 0.382 V_{GS_{off}}$$

$$I_{DS} = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_D + R_S}$$

$$V_{DD} = I_{DS} (R_D + R_S) + V_{DS}$$

Polarización por divisor de voltaje



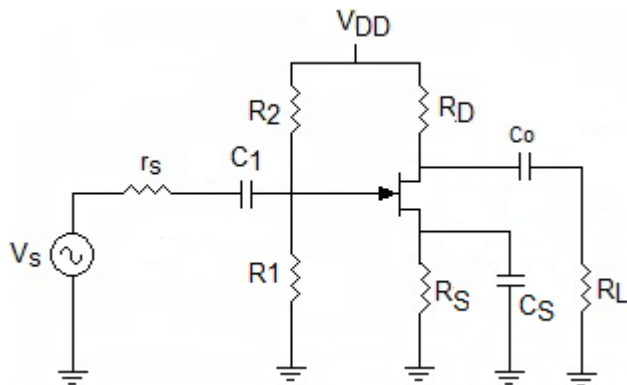
$$I_{DS} = \frac{V_{GG} - V_{GS}}{R_S}$$

$$R_G = R_1 \parallel R_2$$

$$V_{GG} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{DD}$$

$$I_{DS} = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_S + R_D}$$

Amplificador fuente común



$$R_G = R_1 \parallel R_2$$

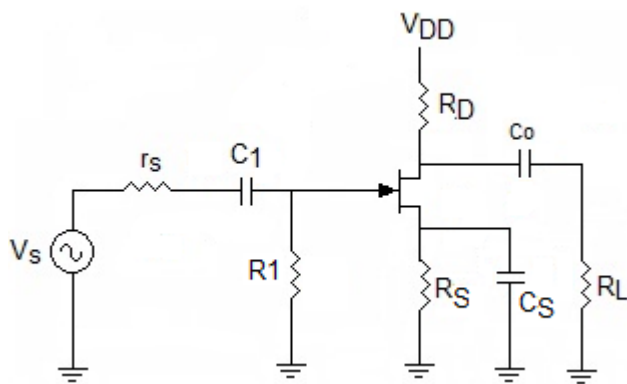
$$R_L = R_D \parallel R_L$$

$$Z_i = R_G$$

$$Z_o = r_{ds} \parallel R_D$$

$$A_V = \frac{V_L}{V_S} = -g_m (r_{ds} \parallel R_D) \frac{R_G}{R_G + r_s}$$

$$A_i = \frac{V_L}{V_S} = -\frac{r_{DS} \parallel R_D}{r_{DS} \parallel R_D + r_s} g_m \cdot R_G$$



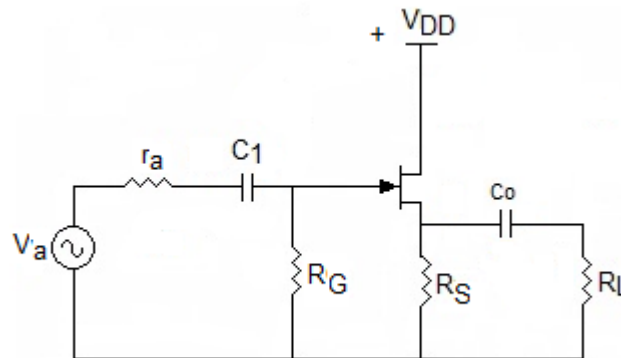
$$I_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{I_D R_S}{V_{GS(CORTE)}} \right)^2$$

$$A_V = g_m R_d$$

$$R_{ent} = R_G \parallel \left(\frac{V_{DD}}{I_{GSS}} \right)$$

Parámetros de corriente alterna (amplificador)

Amplificador drenaje común



Característica

Drenaje común

$$Z_i$$

$$R_G$$

$$Z_o$$

$$R_S \parallel \left(\frac{r_s}{\mu + 1} \right)$$

$$A_{V1} = \frac{V_L}{V_{in}}$$

$$\frac{\mu}{\mu + 1} \cdot \frac{R_S \parallel \left(\frac{r_s}{\mu + 1} \right)}{R_S \parallel \left(\frac{r_s}{\mu + 1} \right) + \frac{r_s}{\mu + 1}}$$

$$A_{I1} = \frac{I_L}{I_{in}}$$

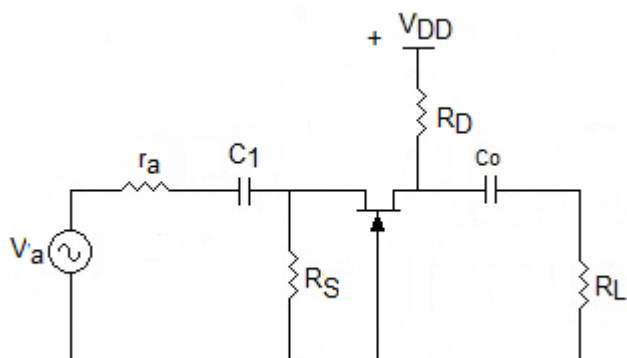
$$A_{V1} = \frac{Z_{in}}{R_L}$$

$$I_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{I_D R_S}{V_{GS(corte)}} \right)^2$$

$$A_V = \frac{gm R_S}{1 + gm R_S}$$

$$R_{ent} = R_G \parallel \left(\frac{V_{DD}}{I_{GSS}} \right)$$

Amplificador en compuerta común



Característica

Compuerta común

$$Z_i$$

$$R_S \parallel \left(r_a + \frac{R_D}{\mu + 1} \right)$$

$$Z_o$$

$$R_D \parallel \left[\left(r_{ds} + \frac{R_S}{\mu + 1} \right) \parallel R_L \right]$$

$$A_{V1} = \frac{V_L}{V_{in}}$$

$$\frac{\mu + 1}{1 + \frac{r_{ds}}{R_D}} \approx g_m \left(r_{ds} \parallel \left(\frac{R_S}{\mu + 1} \right) \parallel R_L \right)$$

$$A_{I1} = \frac{I_L}{I_{in}}$$

$$A_{V1} \cdot \frac{Z_{in}}{R_L}$$

$$I_D = I_{DSS} \left(1 - \frac{I_D R_S}{V_{GS(corte)}} \right)^2$$

$$A_V = g_m R_D$$

$$R_{ent} = \left(\frac{1}{g_m} \right) \parallel \left(\frac{R_D}{\mu + 1} \right)$$

donde:

I_D =Corriente a través de un FET autopolarizado

A_v =Ganancia en voltaje

R_{ent} =Resistencia de entrada

I_{DSS} =Corriente en drenaje

V_{GS} =Voltaje en la compuerta

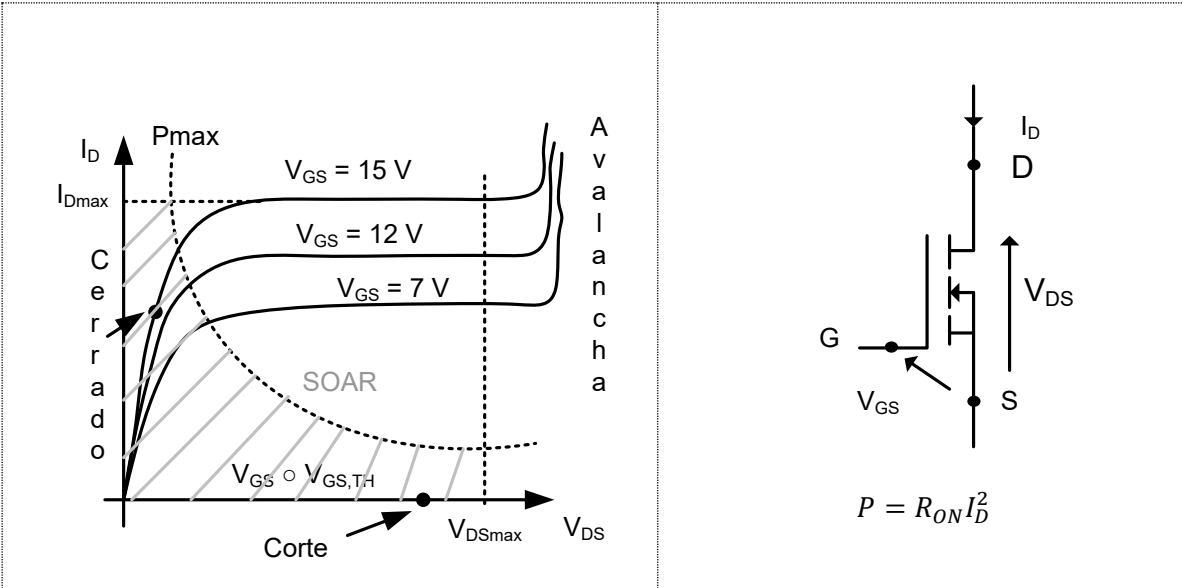
R_S =Resistencia en la fuente

I_{GSS} =Corriente de fuga en inversa

Capacitancia	Compuerta común	Drenaje común
C_i	$\frac{1}{2\pi(F_L)(r_a + Z_{in})}$	$\frac{1}{2\pi\left(\frac{F_L}{10}\right)(r_a + Z_{in})}$
C_o	$\frac{1}{2\pi\left(\frac{f_L}{10}\right)(r_L + Z_{out})}$	$\frac{1}{2\pi(f_L + Z_o)}$

Transistor MOSFET

Curva característica



Para un MOSFET de canal inducido tipo n en su región lineal:

$$I_{D(Act)} = K \left[(V_{GS} - V_T) V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

donde: $K = \frac{b\mu_n\epsilon}{LW}$ en la que b es el ancho del canal, μ_n la movilidad de los electrones, ϵ es la permitividad eléctrica de la capa de óxido, L la longitud del canal y W el espesor de capa de óxido.

Cuando el transistor opera en la región de saturación, la fórmula pasa a ser la siguiente:

$$I_{D(sat)} = \frac{K+1}{K_0} (V_{GS} - V_T)^2$$

Amplificadores operacionales

Características

Razón de rechazo de modo común

$$CMRR = \frac{A_{Vd}}{A_{Vc}}$$

$$CMRR = 20 \log \left(\frac{A_{Vd}}{A_{Vc}} \right)$$

Rapidez de variación de voltaje (slew-rate)

$$SR = \frac{\Delta V_{sal}}{\Delta t}$$

Corriente de polarización de entrada

$$I_{polarización} = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

Desequilibrio de corriente de entrada

$$I_{OS} = |I_1 - I_2|$$

Voltaje de error de salida

$$V_{sal(error)} = A_V I_{OS} R_{ent}$$

Frecuencia máxima de operación

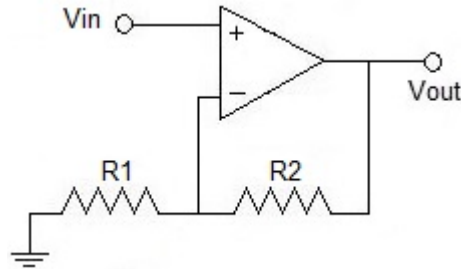
$$f_{\max} = AB \quad \text{si} \quad AB \leq \frac{SR}{2\pi V_p}$$

$$f_{\max} = \frac{SR}{2\pi V_p} \quad \text{si} \quad AB > \frac{SR}{2\pi V_p}$$

Configuraciones de amplificadores

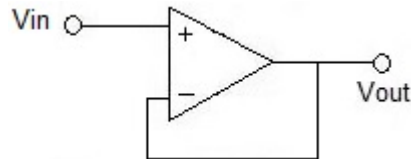
Amplificador no inversor

$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



Seguidor de voltaje

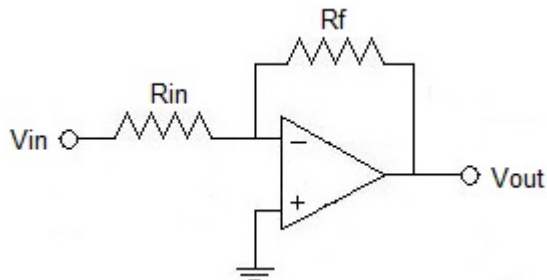
$$A_v = 1$$



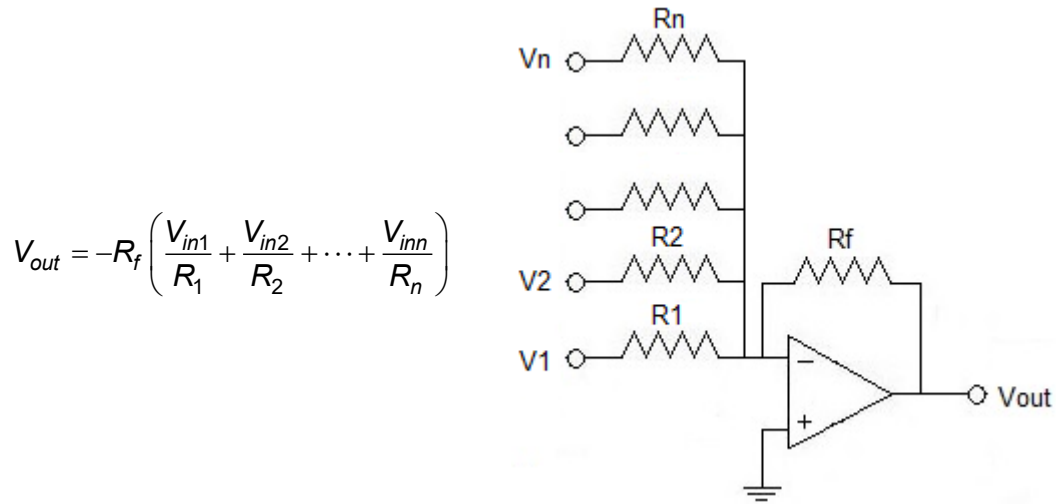
Amplificador inversor

$$A_v = -\frac{R_f}{R_{in}}$$

$$Z_{ent} \cong R_{in}$$



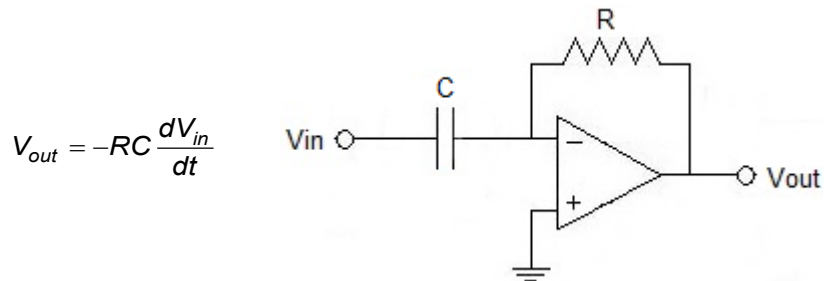
Amplificador sumador inversor con ganancia de n entradas



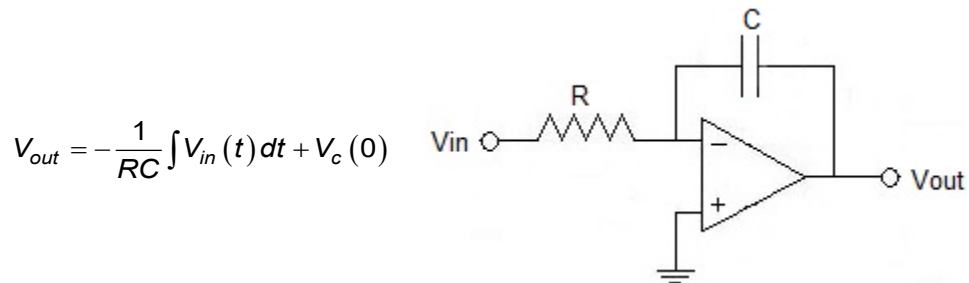
Amplificador restador

$$V_{sal} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} V_2 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 \right)$$

Amplificador derivador



Amplificador integrador



Amplificador de disparo alto

$$V_{disparo\ alto} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (+V_{sal\ max})$$

Amplificador de disparo bajo

$$V_{disparo\ bajo} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (-V_{sal\ max})$$

Amplificador de histéresis

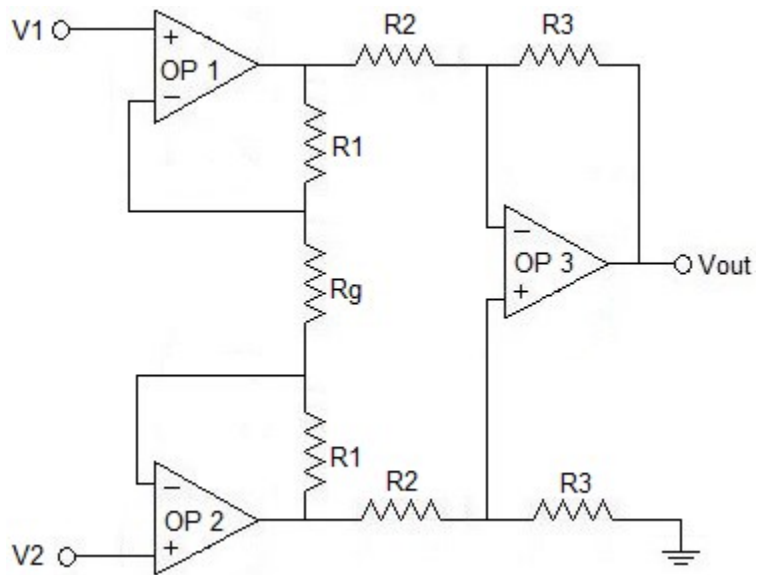
$$V_H = V_{disparo\ alto} - V_{disparo\ bajo}$$

Amplificador de instrumentación

$$I_g = (V_2 - V_1) \left(\frac{1}{R_g} \right)$$

$$V_{intermedio} = (V_2 - V_1) \left(1 + \frac{2R_1}{R_g} \right)$$

$$V_{out} = (V_2 - V_1) \left(1 + \frac{2R_1}{R_g} \right) \frac{R_3}{R_2}$$



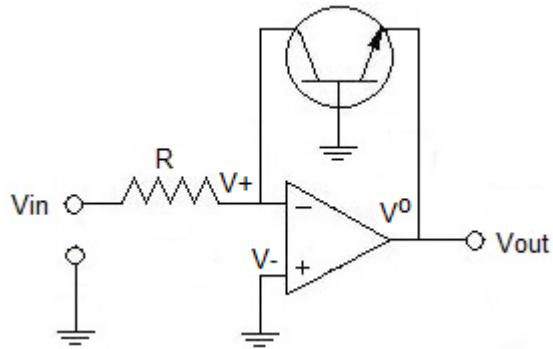
Amplificador de aislamiento

$$A_{v1} = \frac{R_{f1}}{R_{i1}} + 1$$

$$A_{v2} = \frac{R_{f2}}{R_{i1}} + 1$$

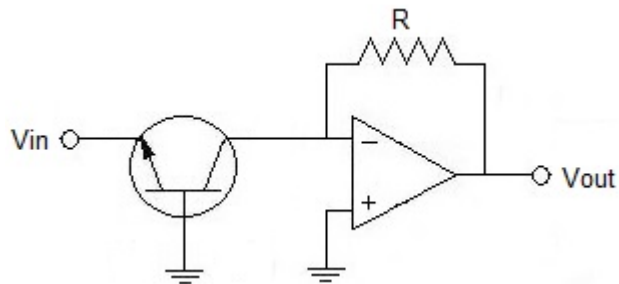
Amplificador logarítmico

$$V_{out} = -(0.025) \ln \left(\frac{V_{in}}{I_{EBO} R} \right)$$



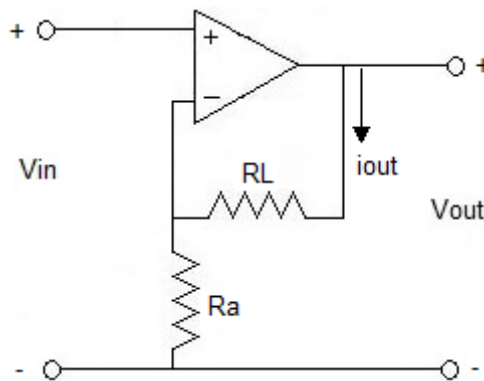
Amplificador anti logarítmico

$$V_{out} = -R I_{EBO} \ln^{-1} \left(\frac{V_{in}}{25mV} \right)$$

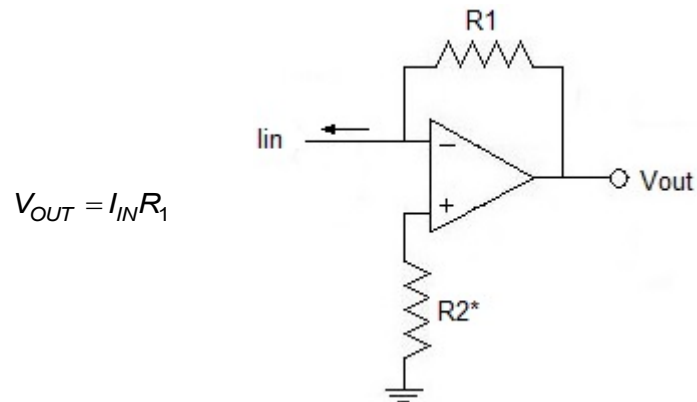


Convertidor de voltaje a corriente

$$I_{out} = \frac{V_{in}}{R_a}$$



Convertidor de corriente a voltaje



Disparador Schmitt

$$R_F = \frac{V_{sat}}{V_{th}} R_1$$

$$R_X = R_1 \square$$

Filtros activos

Ancho de banda de un filtro pasa bajas

$$AB = f_c$$

Ancho de banda de un filtro pasa banda

$$AB = f_{cs} - f_{ci}$$

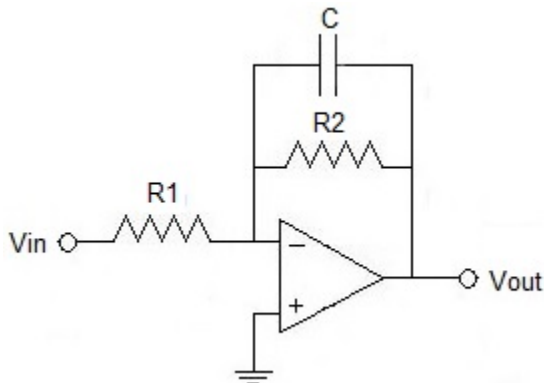
Frecuencia central de un filtro pasa banda

$$f_0 = \sqrt{f_{cs} \cdot f_{ci}}$$

Factor de calidad de un filtro pasa banda

$$Q = \frac{f_0}{AB}$$

Filtro pasa bajas de primer orden



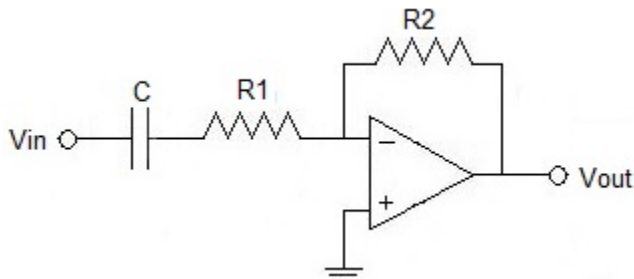
Ganancia en la región de paso

$$H_{0LP} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Frecuencia de corte

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C}$$

Filtro pasa altas de primer orden



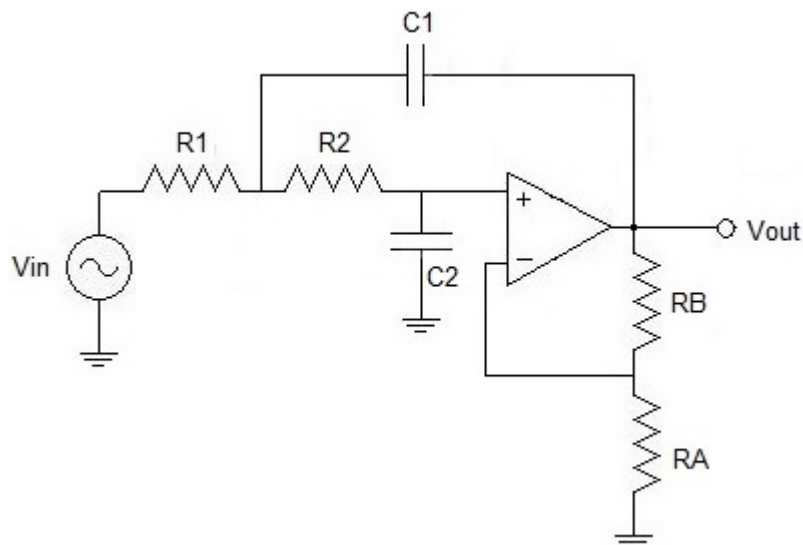
Ganancia en la región de paso

$$H_{0HP} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Frecuencia de corte

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

Filtro pasa bajas Sallen&Key (KRC) de segundo orden



Si $R_1 = R_2 = R$ y

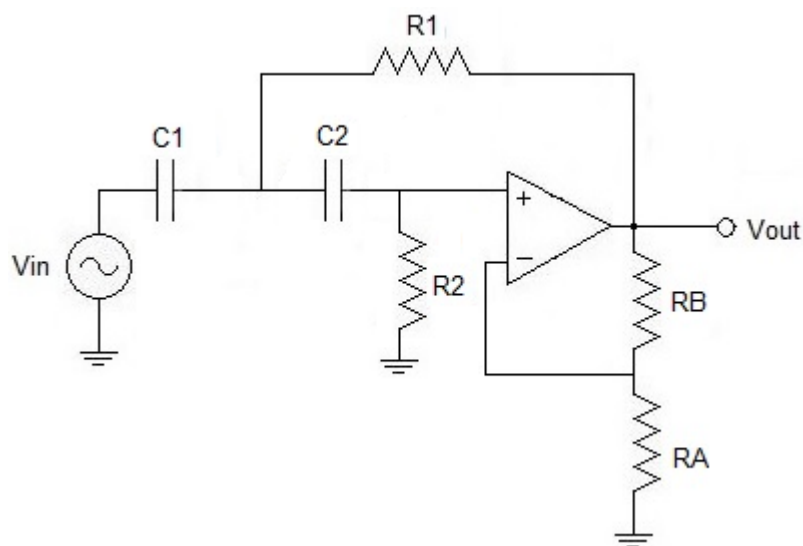
$C_1 = C_2 = C$

$$H_{0LP} = K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{1}{3 - K}$$

Filtro pasa altas Sallen&Key (KRC) de segundo orden



Si $R_1 = R_2 = R$ y

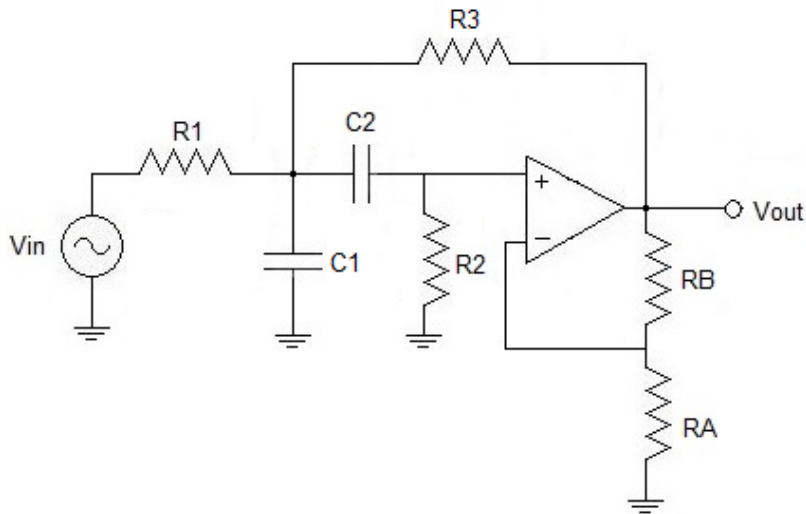
$C_1 = C_2 = C$

$$H_{0HP} = K = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{1}{3 - K}$$

Filtro pasa banda Sallen&Key (KRC) de segundo orden



Si $R_1 = R_2 = R_3 = R$ y
 $C_1 = C_2 = C$

$$H_{0BP} = \frac{K}{4-K}$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC}$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{4-K}$$

Tabla de diseño de filtros activos

Butterworth low-pass filter						
n	f ₀₁	Q ₁	f ₀₂	Q ₂	f ₀₃	Q ₃
2	1	0.707				
3	1	1.000	1			
4	1	0.541	1	1.306		
5	1	0.618	1	1.620	1	

Bessel low-pass filter						
n	f ₀₁	Q ₁	f ₀₂	Q ₂	f ₀₃	Q ₃
2	1.274	0.577				
3	1.453	0.691	1.327			
4	1.419	0.522	1.591	0.806		
5	1.561	0.564	1.760	0.917	1.507	

0.10-dB ripple Chebyshev low-pass filter						
n	f ₀₁	Q ₁	f ₀₂	Q ₂	f ₀₃	Q ₃
2	1.820	0.767				
3	1.200	1.341	0.969			
4	1.153	2.183	0.789	0.619		
5	1.093	3.282	0.797	0.915	0.539	

1.00-dB ripple Chebyshev low-pass filter						
n	f ₀₁	Q ₁	f ₀₂	Q ₂	f ₀₃	Q ₃
2	1.050	0.957				
3	0.997	2.018	0.494			
4	0.993	3.559	0.529	0.785		
5	0.994	5.556	0.655	1.399	0.289	

donde:

n = orden del filtro

$\omega_O = 2\pi f_c f_{0n}$ para el filtro pasa bajas

$\omega_O = 2\pi f_c / f_{0n}$ para el filtro pasa altas

Filtros Butterworth

La magnitud de la función de transferencia al cuadrado es:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}}$$

La función de transferencia para un filtro Butterworth se expresa como:

$$H(s) = \frac{1}{B_n(s)}$$

Los polinomios normalizados para los filtros Butterworth son:

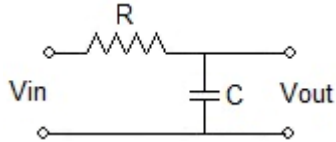
$$B_1(s) = s + 1$$

$$B_2(s) = s^2 + 1.4142s + 1$$

$$B_3(s) = s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Filtros pasivos

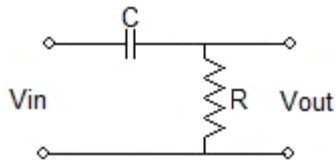
Filtro pasa bajas de primer orden



Frecuencia de corte

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

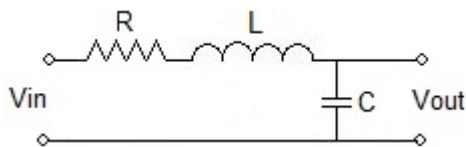
Filtro pasa altas de primer orden



Frecuencia de corte

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

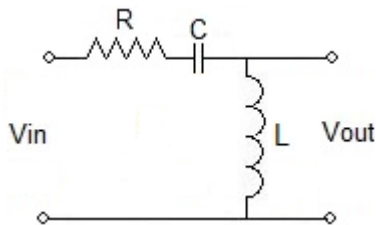
Filtro pasa bajas de segundo orden



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

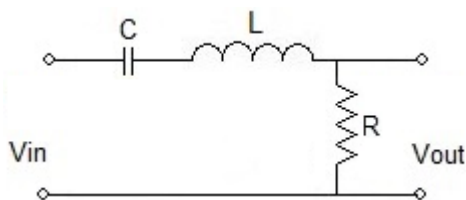
Filtro pasa altas de segundo orden



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Filtro pasa banda de segundo orden



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Convertidores

Convertidores de voltaje a frecuencia

$$f_0 = \frac{V_1}{|V_{ref}| R_{ent} C_{ref}}$$

donde:

V_1 = voltaje de entrada

V_{ref} = voltaje de referencia

C_{ref} = capacitancia de referencia

Convertidores de frecuencia a voltaje

$$V_0 = |V_{ref}| R_{int} C_{ref} f_{ent}$$

donde:

f_{ent} = frecuencia de entrada en Hz

$|V_{ref}|$ = voltaje de referencia en V

R_{int} = resistencia del integrador interno

C_{ref} = capacitancia de referencia

Convertidores digital analógico

$$I_s = V_{ref} \left(\frac{B_0}{R_0} + \frac{B_1}{R_1} + \frac{B_2}{R_2} + \frac{B_3}{R_3} \right)$$

$$V_0 = -R_F I_F = -R_F V_{ref} \left(\frac{B_0}{R_0} + \frac{B_1}{R_1} + \frac{B_2}{R_2} + \frac{B_3}{R_3} \right)$$

donde:

$$R_0 = \frac{R}{2^0} = R$$

$$R_1 = \frac{R}{2^1} = \frac{R}{2}$$

$$R_2 = \frac{R}{2^2} = \frac{R}{4}$$

$$R_3 = \frac{R}{2^3} = \frac{R}{8}$$

Convertidor digital analógico con red de escalera R – 2R

$$V_0 = -\frac{V_{ref}R_F}{3R} \left(\frac{B_0}{2^4} \right) \text{ para LSB} = 1 \text{ único}$$

$$V_0 = -\frac{V_{ref}R_F}{3R} \left(\frac{B_3}{2^1} \right) \text{ para MSB} = 1 \text{ único}$$

$$V_0 = -\frac{V_{ref}R_F}{3R} \left(\frac{B_0}{2^4} + \frac{B_1}{2^3} + \frac{B_2}{2^2} + \frac{B_3}{2^1} \right) \text{ cuando el sistema está completamente activado}$$

Convertidor analógico digital de aproximaciones sucesivas

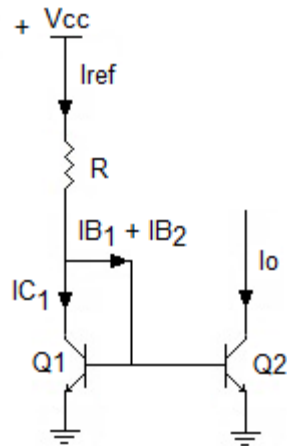
$$V_{conv} = \text{sgn}(V_a - V_b) = \begin{cases} 1 & \text{para } V_a > V_b \\ 0 & \text{para } V_a < V_b \end{cases}$$

Proceso de aproximaciones sucesivas

Paso	V _b	B ₃	B ₂	B ₁	B ₀	Comparaciones	Respuesta
1	8 V	1	0	0	0	¿Es V _a > 8 V?	Sí
2	12 V	1	1	0	0	¿Es V _a > 12 V?	No
3	10 V	1	0	1	0	¿Es V _a > 10 V?	Sí
4	11 V	1	0	1	1	¿Es V _a > 11 V?	No
	10 V	1	0	1	0	Leer salida	

Amplificadores de corriente

Fuente de corriente con BJT



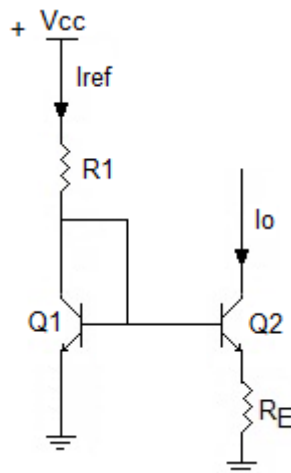
$$V_{BE1} = V_{BE2} = V_{CE1} = 0.7 \text{ V}$$

La corriente en el colector

$$I_{C1} = I_{C2} = \frac{I_R}{1 + \frac{2}{\beta_F}}$$

$$R_1 = \frac{V_{CC} - V_{BE1}}{I_R}$$

Fuente de corriente Widlar



La suma de las tensiones en la base de los transistores

$$V_{BE1} - V_{BE2} - I_{C2}R_E = 0$$

Para el análisis de esta fuente de corriente es preciso utilizar la ecuación de Ebers-Moll simplificada de un transistor en la región lineal que relaciona la I_C con la tensión V_{BE} :

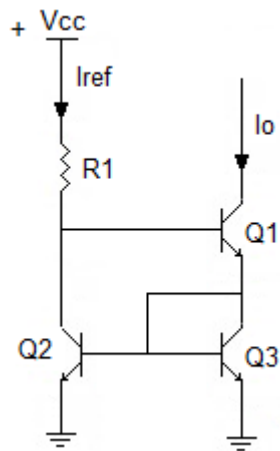
$$V_T \ln \frac{I_{C1}}{I_S} = I_S R_E$$

donde: $I_{C1} = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_1}$

La resistencia de salida de esta fuente es:

$$Z_O = h_{oe2}^{-1} \left(1 + \frac{\beta_F R_E}{h_{ie2} + R_E} \right)$$

Fuente de corriente Wilson



$$I_{E2} = (1 + \beta_F) I_{B2}$$

Si los transistores son idénticos

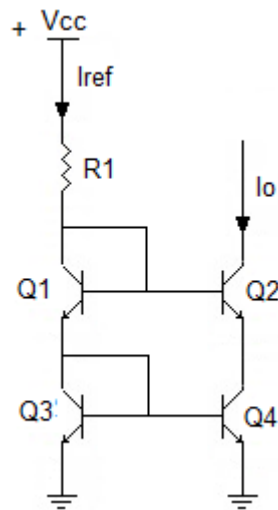
$$I_{E2} = I_{C3} + I_{B3} + I_{B1} = \left(1 + \frac{1}{\beta_F} \right) + \frac{I_{C1}}{\beta_F}$$

$$I_{OUT} = \frac{V_{CC} - 2V_{BE}}{R_1}$$

Resistencia de salida

$$Z_{out} = \frac{h_{fe} h_{oe}^{-1}}{2}$$

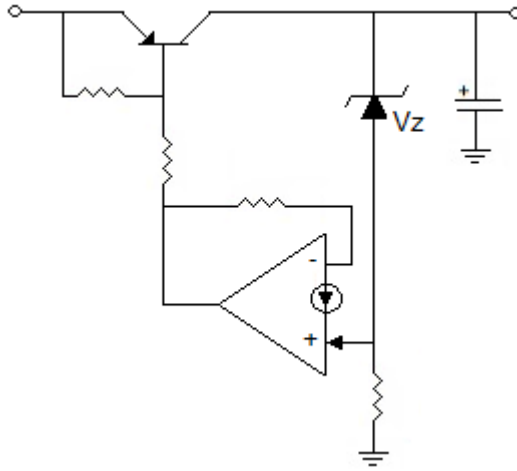
Fuente de corriente Cascode



$$I_{out} = \frac{V_{CC} - 2V_{BE}}{R_1}$$

$$Z_{out} = h_{fe} \cdot h_{oe}^{-1}$$

Fuentes de corriente controlada con voltaje



Si $R_2 = R_4$

$$I_S = \frac{R_2 V_e}{R_S R_1}$$

Para que el operacional esté en equilibrio se debe de cumplir que:

$$\frac{V^+}{R_4} = \frac{V_e}{R_1} + \frac{V^+ - R_S I_S}{R_2}$$

Para la polarización del transistor

$$V_2 = V^+ - R_S I_S$$

Electrónica digital

Algebra de Boole

a) Propiedad conmutativa:

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= d + c + b + a \\a \cdot b \cdot c \cdot d &= d \cdot c \cdot b \cdot a \\d \cdot c \cdot b \cdot a + d \cdot c \cdot a + b \cdot c &= d \cdot c \cdot a + c \cdot b + d \cdot a \cdot c \cdot b\end{aligned}$$

b) Propiedad asociativa:

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= (a + b) + (c + d) \\d \cdot c \cdot b \cdot a &= (d \cdot c) \cdot (b \cdot a)\end{aligned}$$

c) Propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\a + (b \cdot c) &= (a + b) \cdot (a + c)\end{aligned}$$

d) Propiedad de identidad de elementos neutros 0 y 1:

$$\begin{aligned}0 + a &= a \\1 \cdot a &= a\end{aligned}$$

e) Leyes del algebra de Boole:

$$\begin{aligned}a + 0 &= a & a \cdot 0 &= 0 \\a + 1 &= 1 & a \cdot 1 &= a \\a + a &= a & a \cdot a &= a \\a + a' &= 1 & a \cdot a' &= 0\end{aligned}$$

f) Suma y resta binaria:

$$\begin{aligned}0 + 0 &= 0 & 0 - 0 &= 0 \\0 + 1 &= 1 & 0 - 1 &= 1 \\1 + 0 &= 1 & 1 - 0 &= 1 \\1 + 1 &= 10 & 1 - 1 &= 0\end{aligned}$$

g) Teorema de Shanon: Cualquier expresión booleana negada es equivalente a la misma expresión en la que todas las variables son negadas y se sustituyen las operaciones (+) por (·) y viceversa:

$$((a + b) \cdot c)' = (a \cdot b)' + c'$$

- h) Primer teorema de De Morgan: El complemento de un producto de variables es igual a la suma de los complementos de las variables:

$$(a \cdot b)' = a' + b'$$

- i) Segundo teorema de De Morgan: El complemento de una suma de variables es igual al producto de los complementos de las variables:

$$(a + b)' = a' \cdot b'$$

Mapa de Karnaugh

Reglas para simplificar una función mediante mapas de Karnaugh

- Determinar el número de variables involucradas
Ejemplo: A y B
- Realizar un mapa que cumpla con la relación 2^N . Donde N representa el número de variables y 2^N el número de combinaciones posibles

Ejemplo: Si N es igual a 2 entonces $2^2 = 4$ combinaciones posibles

A	B	SALIDA
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

- Debe de existir un cuadro para cada combinación de entrada.

	B	0	1
A	0		
	1		

- Introducir el valor lógico de cada minitérmino en su cuadro correspondiente.

Ejemplo: $F(A,B) = \sum m(0,1)$.

	B	0	1
A	0	1	1
	1		

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

- Buscar encerrar 2^N cuadros adyacentes. Hacer encierros de 1,2,4,8, etc.

		B	
		0	1
A	0	1	1
	1		

Determinar la función de salida correspondiente:

Ejemplo: Salida = A/B

- Aspectos a considerar
 - a) Tratar de hacer el máximo encierro posible
 - b) Buscar que no exista redundancia en los encierros seleccionados

Conversión de decimal a BCD natural, BCD Aiken y BCD exceso 3

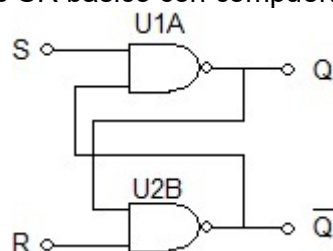
Decimal	BCD natural	BCD Aiken	BCD exceso 3
	8 4 2 1	2 4 2 1	
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 1
1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 0 0
2	0 0 1 0	0 0 1 0	0 1 0 1
3	0 0 1 1	0 0 1 1	0 1 1 0
4	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 1 1
5	0 1 0 1	1 0 1 1	1 0 0 0
6	0 1 1 0	1 1 0 0	1 0 0 1
7	0 1 1 1	1 1 0 1	1 0 1 0
8	1 0 0 0	1 1 1 0	1 0 1 1
9	1 0 0 1	1 1 1 1	1 1 0 0

Circuitos digitales básicos

Compuerta	Función	Tabla de verdad	Símbolo															
OR	$f = A + B$	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>f</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	B	A	f	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	
B	A	f																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	1																
AND	$f = A \cdot B$	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>f</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	B	A	f	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	
B	A	f																
0	0	0																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																
NOT	$f = \overline{A}$	<table><tr><th>A</th><th>f</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	f	0	1	1	0										
A	f																	
0	1																	
1	0																	
NOR	$f = \overline{A + B}$	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>f</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	B	A	f	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	
B	A	f																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	0																
NAND	$f = \overline{A \cdot B}$	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>f</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	B	A	f	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	
B	A	f																
0	0	1																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
XOR	$f = A \oplus B$	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>f</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	B	A	f	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	
B	A	f																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
XNOR	$f = A \otimes B$	<table><tr><th>B</th><th>A</th><th>f</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	B	A	f	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	
B	A	f																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																

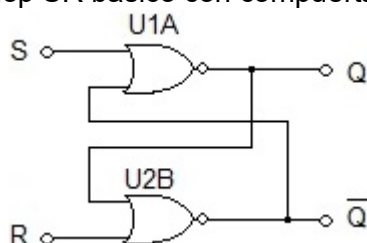
Flip-flops

Flip-flop SR básico con compuerta NAND



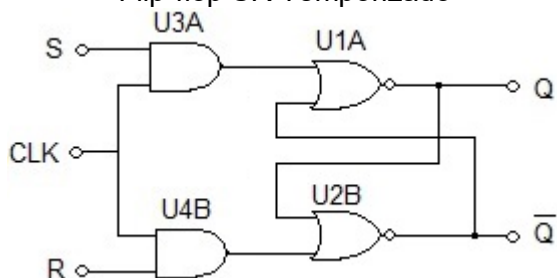
S	R	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	inválido	inválido
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	Q(t)	$\bar{Q}(t)$

Flip-flop SR básico con compuerta NOR



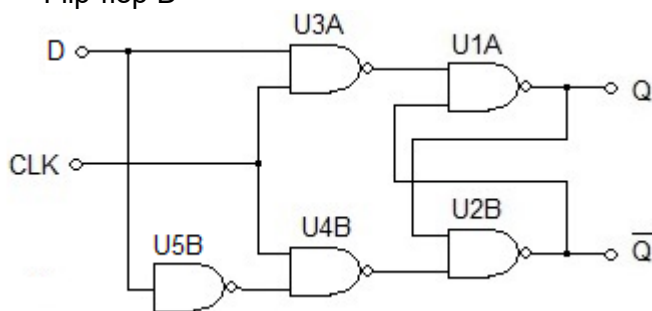
S	R	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	Q(t)	$\bar{Q}(t)$
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	inválido	inválido

Flip-flop SR Temporizado



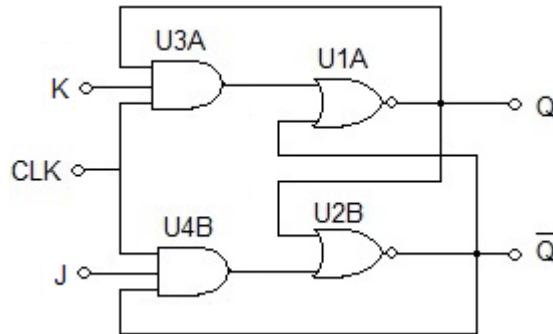
Q	S	R	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	indeterminado	indeterminado
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	indeterminado	indeterminado

Flip-flop D



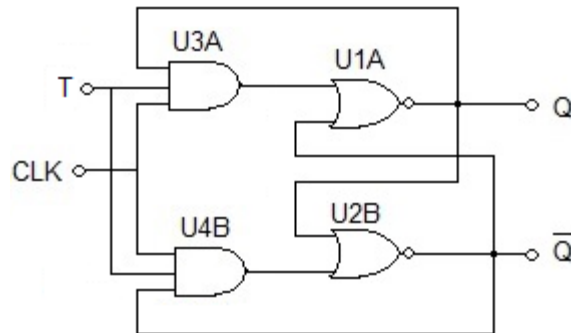
Q	D	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

Flip-flop JK



Q	J	K	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Flip-flop T



Q	T	Q(t+1)	$\bar{Q}(t+1)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Electrónica de potencia

Fórmulas básicas

Eficiencia

$$\eta = \frac{P_{CD}}{P_{CA}}$$

Valor efectivo CA

$$V_{CA} = \sqrt{V_{rms}^2 - V_{CD}^2}$$

El factor de utilización del transformador

$$TUF = \frac{P_{CD}}{V_s I_s}$$

donde:

V_s = Voltaje rms en el secundario del transformador [V]

I_s = Corriente rms en el secundario del transformador [A]

Distorsión armónica total THD

$$THD = \left(\frac{I_s^2 - I_{s1}^2}{I_{s1}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Rectificador monofásico de onda completa

$$V_{CD} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_m \sin \omega t dt = \frac{2V_m}{\pi}$$

donde:

V_m = Voltaje máximo inverso [V]

Corriente promedio de carga es

$$I_{CD} = \frac{V_{CD}}{R}$$

Corriente rms de salida

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{R}$$

Voltaje rmssalida

$$V_{rms} = \left[\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_m^2 \sin^2 \omega t dt \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Rectificador trifásico en puente

$$V_{CD} = \frac{2}{2\pi/6} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} V_m \cos \omega t dt = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} V_m$$

donde:

V_m = Voltaje máximo [V]

El voltaje rms de salida es:

$$V_{cd} = \left[\frac{2}{2\pi/6} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} V_m^2 \cos^2 \omega t dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} V_m$$

Dispositivos

Ecuación del Diodo Schockley

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right)$$

donde:

I_D =Corriente a través del diodo [A]

V_D =Voltaje de polarización directo [V]

I_S =Corriente de fuga [A]

n =Constante para Ge = 1 y para Si = 1.1 y 1.8

$$V_T = \frac{kT}{q} \approx 25.8 mV$$

donde:

V_T =Voltaje térmico

Q =Carga del electrón (1.6022×10^{-19}) [C]

T = Temperatura absoluta [K]

K =Constante de Boltzman 1.3806×10^{-23} [J/K]

Tiempo total de recuperación inversa (t_{rr})

$$t_{rr} = t_a + t_b$$

donde:

t_a =Tiempo de almacenamiento de carga en la región de agotamiento[s]

t_b =Tiempo de almacenamiento de carga en el cuerpo del semiconductor [s]

Corriente inversa pico (I_{RR})

$$I_{RR} = t_a \frac{d_i}{d_t} = \sqrt{2Q_{RR} \frac{d_i}{d_t}}$$

donde:

Q_{RR} = carga de recuperación inversa [C]

Rectificadores monofásicos de media onda

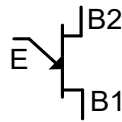
Potencia de salida en CD

$$P_{CD} = V_{CD} I_{CD}$$

Potencia de salida en CA

$$P_{CA} = V_{rms} I_{rms}$$

UJT



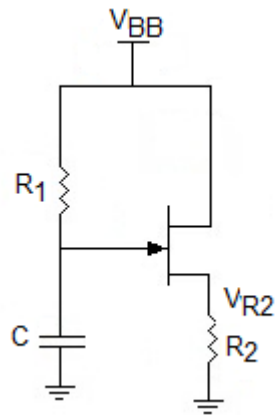
El disparo ocurre entre el emisor y la base 1 y el voltaje al que ocurre este disparo está dado por la fórmula:

$$V_P = 0.7 + n V_{B_2 B_1}$$

donde:

n = intrinsic standoff ratio (dato del fabricante)

$V_{B_2 B_1}$ = Voltaje entre las dos bases

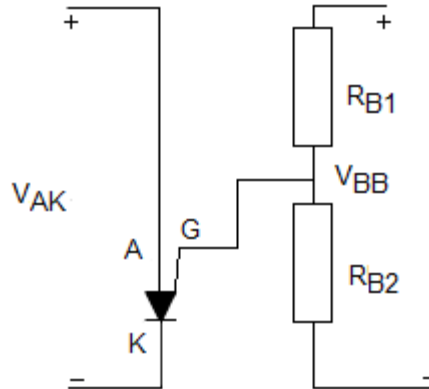


Condición para encendido y apagado

$$\frac{V_{BB} - V_P}{I_P} > R_1 > \frac{V_{BB} - V_V}{I_V}$$

PUT

Este transistor se polariza de la siguiente manera:



Cuando $I_G = 0$

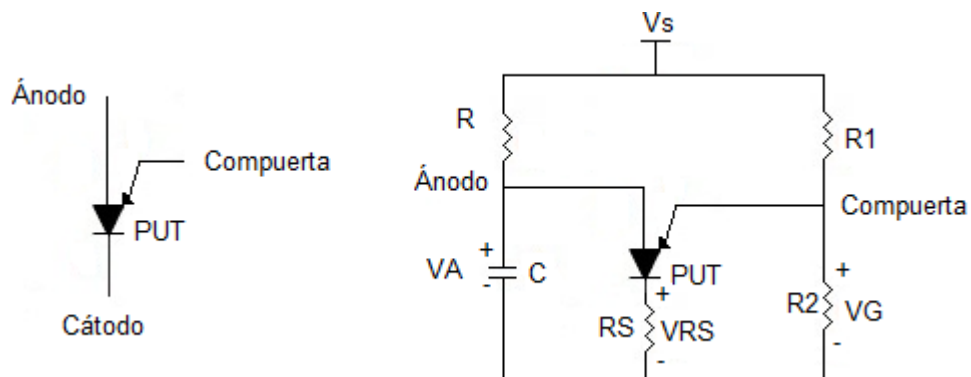
$$V_G = V_{BB} \left[\frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} \right]$$

$$V_G = n V_{BB}$$

donde: $n = R_{B2} / (R_{B1} + R_{B2})$

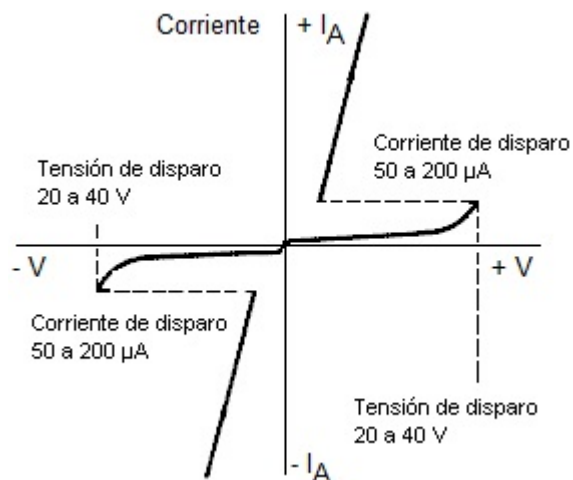
El periodo de oscilación T está dado en forma aproximada por:

$$T = \frac{1}{f} = RC \ln \left(\frac{V_s}{V_s - V_p} \right) = RC \ln \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$



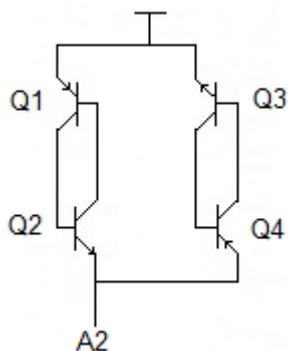
Circuito de disparo para un PUT

DIAC



Si (+V) o (- V) es menor que la tensión de disparo, el DIAC se comporta como un circuito abierto.

Si (+V) o (- V) es mayor que la tensión de disparo, el DIAC se comporta como un cortocircuito.



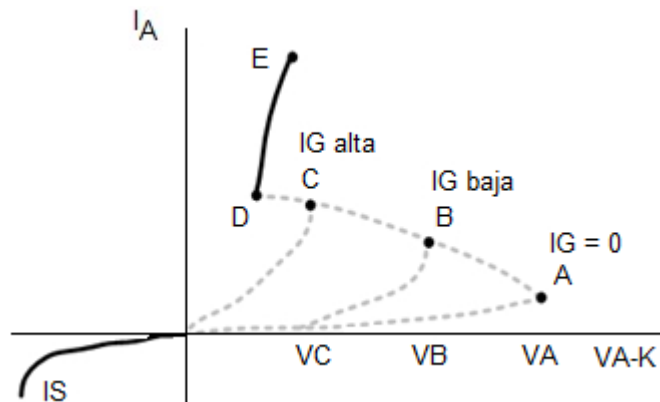
Circuito equivalente del DIAC

SCR

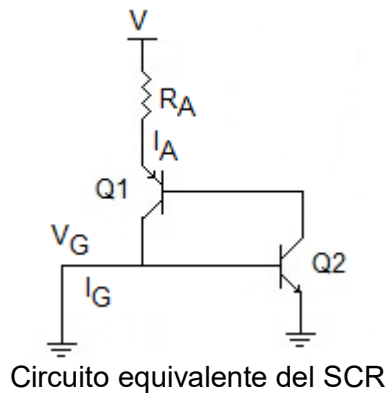
Cuando el SCR está polarizado en inversa se comporta como un diodo común (ver la corriente de fuga I_S).

En la región de polarización en directo el SCR se comporta también como un diodo común, siempre que el SCR ya haya sido activado (On). Ver los puntos D y E.

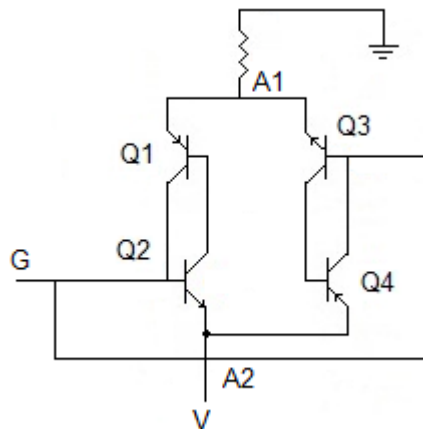
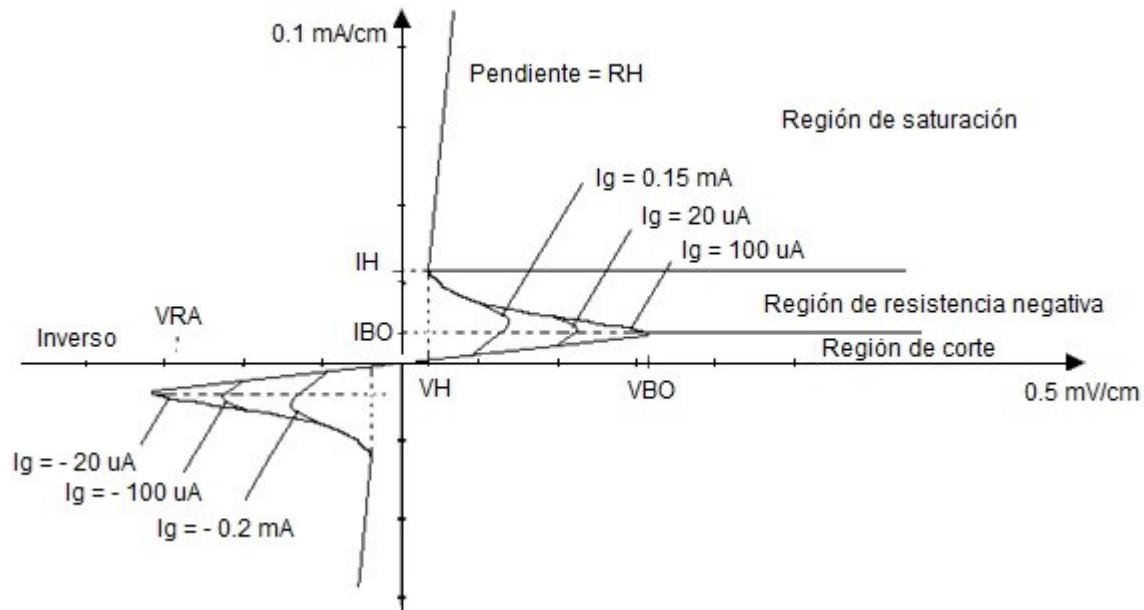
Para valores altos de corriente de compuerta (I_G) (ver punto C), el voltaje de ánodo a cátodo es menor (VC).



Si la I_G disminuye, el voltaje ánodo-cátodo aumenta. (ver el punto B y A, y el voltaje ánodo-cátodo V_B y V_A).

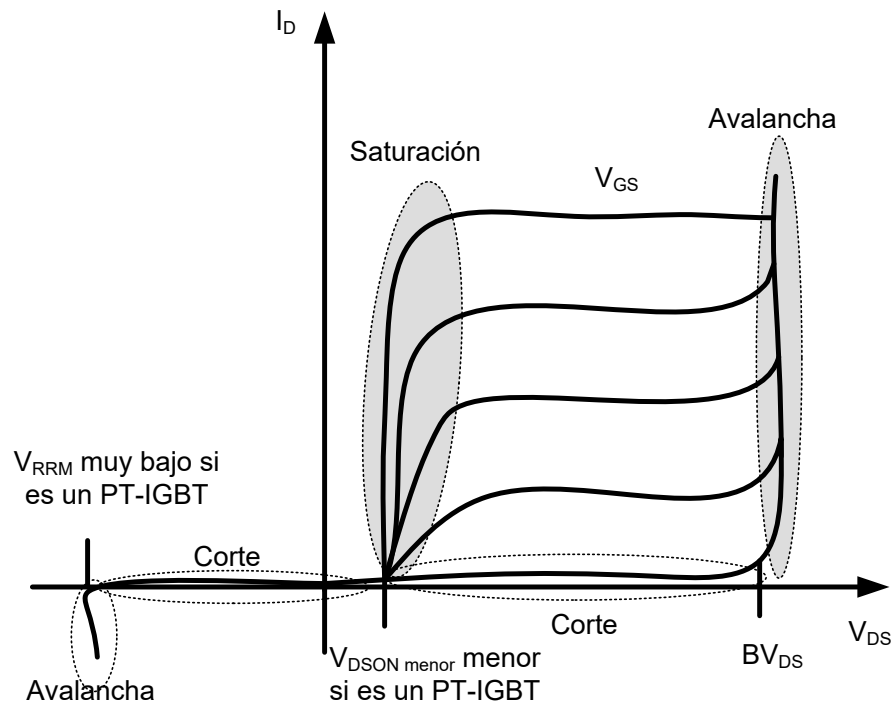


TRIAC



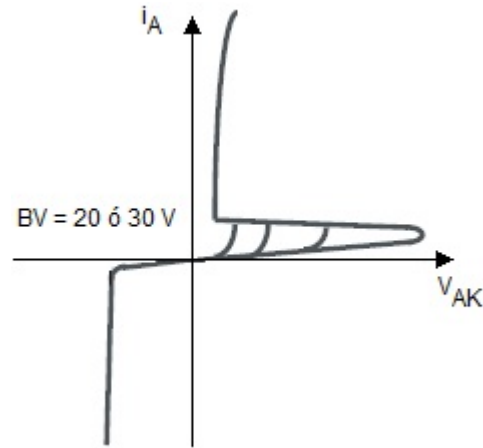
Circuito equivalente al TRIAC

IGBT



GTO

Característica estática



Al cebarlo por corriente entrante de puerta, tenemos exactamente el mismo proceso que en el SCR normal.

Para bloquearlo, será necesario sacar los transistores de saturación aplicando una corriente de puerta negativa:

$$\text{luego } I_G^- > \frac{I_A}{\beta_{off}}$$

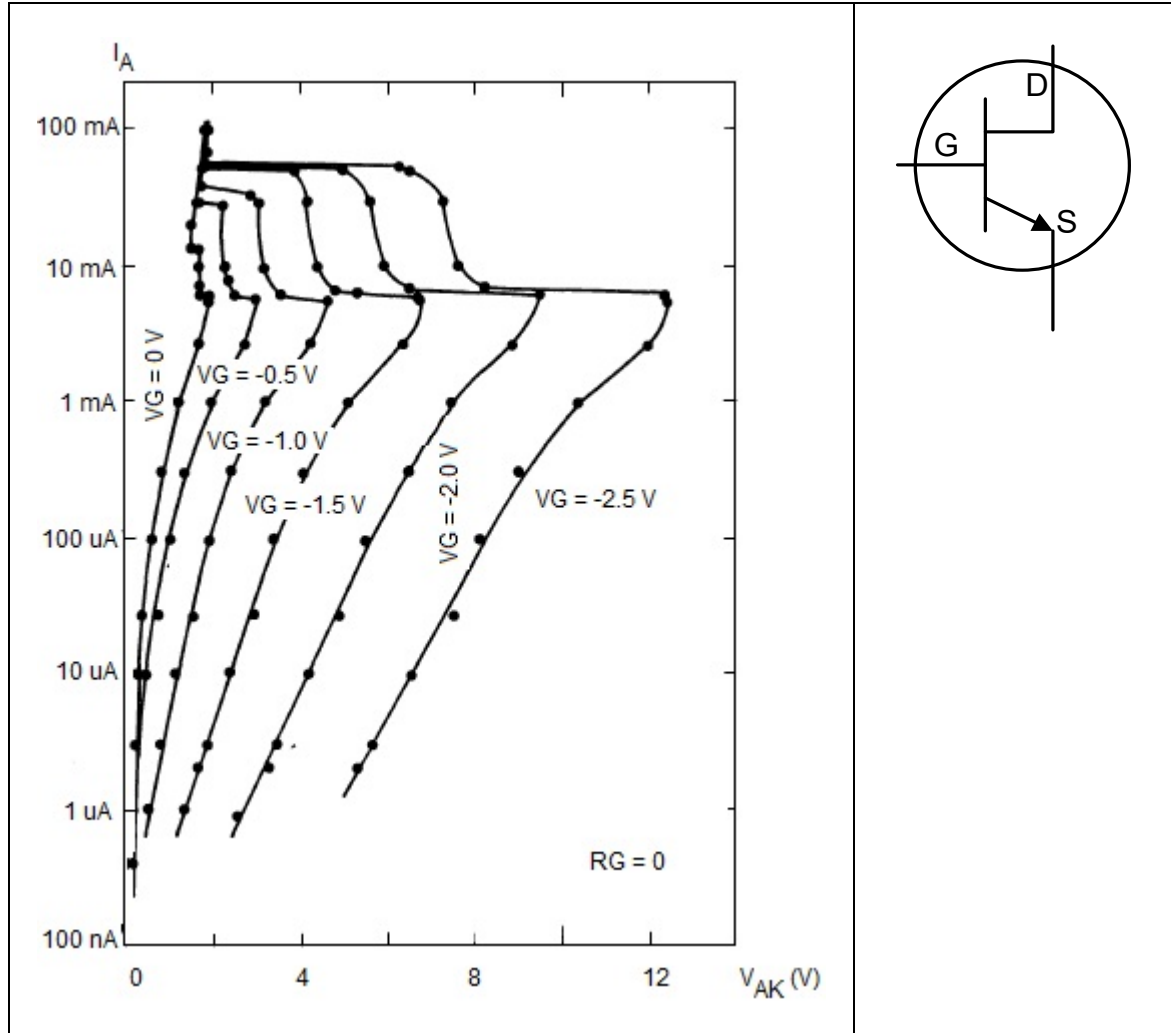
donde β_{off} es la ganancia de corriente en el momento del corte y vendrá expresada por:

$$\beta_{off} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}$$

Para conseguir cortar el GTO, con una corriente soportable por la puerta, debe ser β_{off} lo mayor posible, para ello debe ser: $\alpha_2 \approx 1$ (lo mayor posible) y $\alpha_1 \approx 0$ (lo menor posible).

SIT

Curva característica



Nota: A=D y K=S

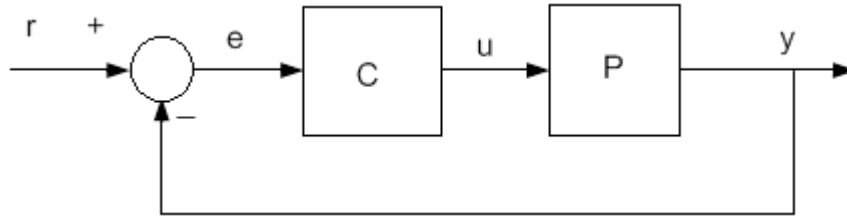
$$-I_G = \frac{\beta}{1+\beta} I_A + I_{CBO}$$

$$-I_G = \frac{I_A}{1+gmR_G}$$

$$I_A = \frac{I_{CBO}(1+gmR_G)}{1+\frac{\beta}{1+\beta}(1+gmR_G)}$$

Teoría de control

Terminología de la ingeniería de control



donde:

r = señal de referencia o set point

e = señal de error ($e=r -y$)

u = acción de control (variable manipulada)

y= señal de salida (variable controlada)

C = controlador

P= Proceso

Modelos de control

Los modelos clásicos de control clásico comprenden ecuaciones diferenciales de orden n.

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-2} \frac{dy(t)}{dt} + a_{n-1} y(t) + a_n = k u(t)$$

Modelo diferencial de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} y(t) + \frac{k}{\tau} u(t)$$

donde:

u(t) = variable de entrada

y(t) = variable de salida

τ = Constante de tiempo

k= ganancia del sistema

Modelo diferencial de segundo orden

Frecuencia amortiguada

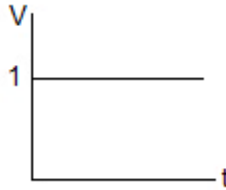
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Tipos de respuesta

Respuesta escalón

La respuesta escalón es la variación, respecto al tiempo, de la variable de salida de un elemento de transferencia, cuando la variable de entrada es una función escalón

$$r(t) = c, c = \text{cte.}$$



Respuesta al escalón de sistemas de primer orden

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Respuesta al escalón de sistemas de segundo orden

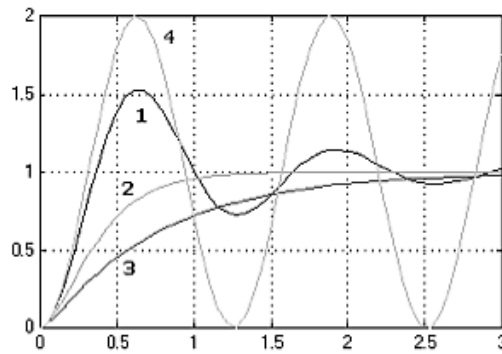
Forma estándar del sistema de segundo orden:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde:

ζ es el factor de amortiguamiento

ω es la frecuencia angular



1. Subamortiguado $0 < \zeta < 1$, raíces complejas conjugadas.

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_n t) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \operatorname{sen}(\omega_n t) \right)$$

2. Críticamente amortiguado $\zeta = 1$, raíces reales e iguales.

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

3. Sobreamortiguado $\zeta > 1$, raíces reales y diferentes.

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{\omega_n t e^{-s_2 t}}{s_2} \right)$$

donde:

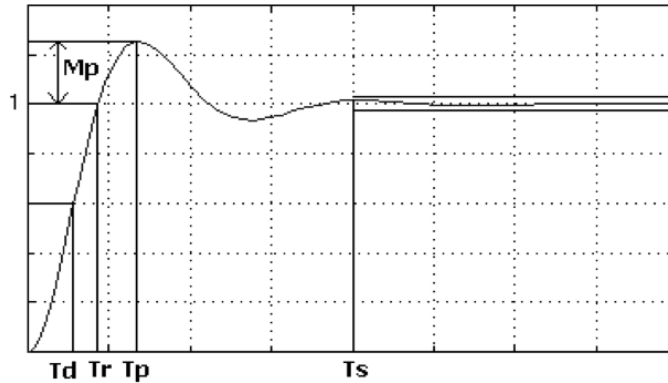
$$s_1 = \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

$$s_2 = \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

4. No amortiguado $\zeta = 0$, raíces imaginarias puras.

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

Parámetros de la respuesta transitoria



Tiempo de retardo (T_d)

Es el tiempo que tarda la respuesta del sistema en alcanzar por primera vez la mitad del valor final.

Tiempo de crecimiento (T_r)

Es el tiempo requerido para que la respuesta crezca del 0 al 100% de su valor final o del 10 al 90%.

$$T_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{\zeta \omega_n} \right)$$

Tiempo pico (T_p)

Es el tiempo en el cual la respuesta del sistema alcanza el primer pico del sobreimpulso.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Máximo sobreimpulso (M_p)

Es el valor pico máximo de la respuesta medido desde la unidad.

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \pi}$$

Tiempo de establecimiento (T_s)

Es el tiempo requerido por la curva de respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado rango alrededor del valor final especificado en porcentaje absoluto del valor final. Se usa generalmente el 5% o 2%

Para un criterio de 2%, $T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$

Para un criterio de 5%, $T_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$

Tiempo de autonomía de una máquina

$$t = \frac{H}{\left(\frac{IH}{C}\right)^k}$$

donde:

t = Tiempo de autonomía de una máquina [h]

C = Tiempo de carga del fabricante [Ampere h]

H = Tiempo indicado por el fabricante [h]

I = Corriente total que demanda el sistema [A]

k = Coeficiente de Peukert (1.1 para baterías de gel y 1.3 para baterías de plomo-ácido)

Temperatura

$$Temp = kA \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

donde:

Temp = Temperatura [°C]

t = tiempo [s]

τ = Constante de tiempo [s]

Regla de Mason

La función de transferencia entre una entrada $U(s)$ y una salida $Y(s)$ está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum G_i \Delta_i$$

donde:

G_i = ganancia de la trayectoria directa i -ésima entre y_{entrada} y y_{salida}

Δ = determinante del sistema = $1 - \sum$ (ganancia de todos los lazos individuales) + $\sum$ (productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos que no se tocan) - $\sum$ (productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de tres lazos que no se tocan) +...

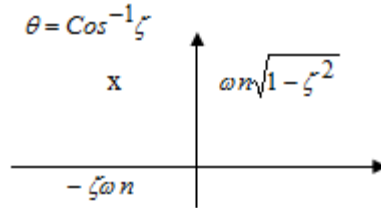
Δ_i = el valor de Δ para aquella parte del diagrama de bloques que no toca la k -ésima trayectoria directa

Tabla 1. Fórmulas para sintonización por el método de ganancia última

Tipo de controlador	Ganancia proporcional	Tiempo integral	Tiempo derivativo
Proporcional P	$K_u/2.0$	--	--
Proporcional-Integral PI	$K_u/2.2$	$T_u/1.2$	--
Proporcional-Integral-Derivativo PID	$K_u/1.7$	$T_u/2.0$	$T_u/8.0$

Controladores

Raíces en el plano complejo



Controlador	Ganancia
P	$G_c(s) = Kc$
PI	$G_c(s) = Kc \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right)$
PD	$G_c(s) = Kc (1 + \tau_d s)$
PID	$G_c(s) = Kc \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right)$

Controladores PID

Estructura ideal

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = Kc \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right)$$

donde:

$E(s) = R(s) - Y(s)$

$R(s)$ es la transformada de Laplace de la referencia

$Y(s)$ es la transformada de Laplace de la variable de proceso controlada

$U(s)$ es la transformada de Laplace de la variable de manipulación

Sintonización por criterios integrales para cambios en perturbación para un PID ideal

Proporcional-Integral

ISE

IAE

ITAE

$$K_c = \frac{1.305}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.959}$$

$$K_c = \frac{0.984}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.986}$$

$$K_c = \frac{0.859}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.977}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.492} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{0.739}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.608} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{0.707}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.674} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{0.680}$$

Proporcional-Integral-Derivativo

ISE
IAE
ITAE

$$K_c = \frac{1.495}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.945}$$

$$K_c = \frac{1.435}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.921}$$

$$K_c = \frac{1.357}{K} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{-0.947}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{01.101} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{0.771}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.878} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{0.749}$$

$$\tau_i = \frac{\tau}{0.842} \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{0.738}$$

$$\tau_d = 0.560 \tau \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{1.006}$$

$$\tau_d = 0.482 \tau \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{1.137}$$

$$\tau_d = 0.381 \tau \left(\frac{t_o}{\tau} \right)^{0.995}$$

donde:

K = la ganancia del proceso de primer orden

τ = constante de tiempo

t_o = tiempo muerto

Sintonización por criterios integrales para cambios en referencia para un PID ideal

Proporcional-Integral

IAE

ITAE

Proporcional-Integral-Derivativo

IAE

ITAE

Comunicaciones

Osciladores

Oscilador controlado por voltaje

Modo de carga

Tiempo de carga en el capacitor

$$\Delta f_1 = \frac{C_1}{I_Q} \Delta v_C = \frac{C_1}{I_Q} (V_H - V_L)$$

Modo de descarga

$$\Delta f_2 = -\frac{C_1}{I_Q} \Delta v_C = -\frac{C_1}{I_Q} (V_L - V_H) = \frac{C_1}{I_Q} (V_H - V_L)$$

$$T = \Delta f_1 + \Delta f_2 = \frac{2C_1(V_H - V_L)}{I_Q}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{I_Q}{2C_1(V_H - V_L)}$$

$$I_Q = G_m (v_{CN} + v_{CO})$$

donde:

G_m = Transconductancia de la fuente de corriente, en A/V

v_{CN} = voltaje de control aplicado, en V

v_{CO} = voltaje constante

$$K_{vF} = \frac{df_0}{dv_{CN}} = \frac{G_m}{2C_1(V_H - V_L)}$$

Oscilador de corrimiento de fase

La función de transferencia del oscilador es:

$$\beta(s) = \frac{V_F(s)}{V_o(s)} = \frac{R^3 C^3 s^3}{R^3 C^3 s^3 + 6R^2 C^2 s^2 + 5RCs + 1}$$

La ganancia de voltaje de lazo cerrado es:

$$A(s) = \frac{V_o(s)}{V_F(s)} = -\frac{R_F}{R_1}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}RC}$$

La resistencia de retroalimentación es:

$$R_F = R_1 \left[\frac{5}{R^2 C^2 \omega^2} - 1 \right]$$

Osciladores de cuadratura

La función de transferencia es:

$$\beta(s) = \frac{V_f(s)}{V_o(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{R+1}{Cs}} = \frac{1}{1+RCs}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

La ganancia en lazo cerrado es:

$$A_f = \frac{1}{\beta} = \sqrt{2}$$

El voltaje en la salida es:

$$V_o = \frac{RV_{o1}}{1 + RCs}$$

Osciladores de Puente Wien

La función de transferencia es:

$$\beta(s) = \frac{V_F(s)}{V_o(s)} = \frac{RCs}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1}$$

La ganancia en voltaje de lazo cerrado es:

$$A(s) = 1 + \frac{R_F}{R_1}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

La condición para la oscilación es:

$$\frac{R_F}{R_1} = 2$$

Oscilador Colpitts

La ganancia de lazo cerrado es:

$$1 - A\beta = 0$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Oscilador de Harley

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{C(L_1 + L_2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Osciladores de cristal

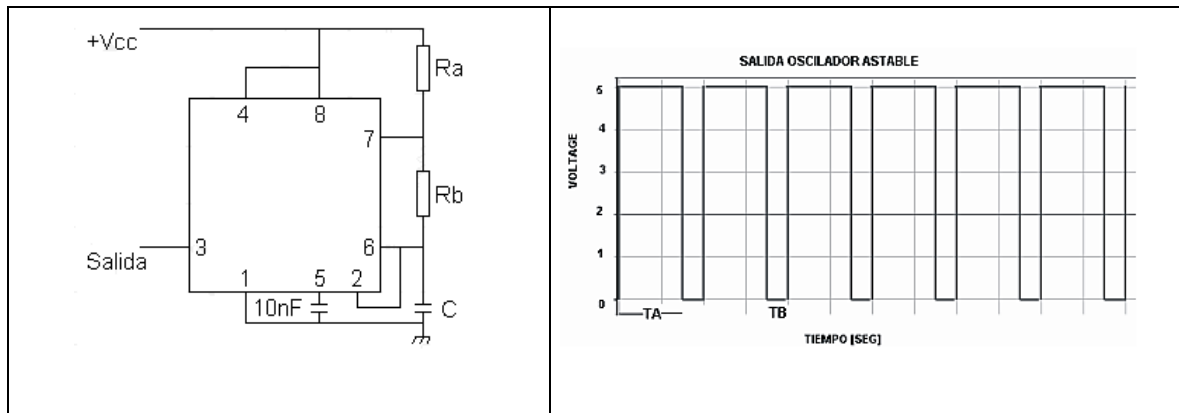
La impedancia del cristal esta dada por:

$$Z(s) = \frac{1}{sC_p} \frac{s^2 + \omega_s^2}{s^2 + \omega_p^2}$$

La frecuencia de oscilación es:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_s}}$$

555/556 (Multivibrador astable)



donde:

$$TA = 0.693(R_a + R_b)C$$

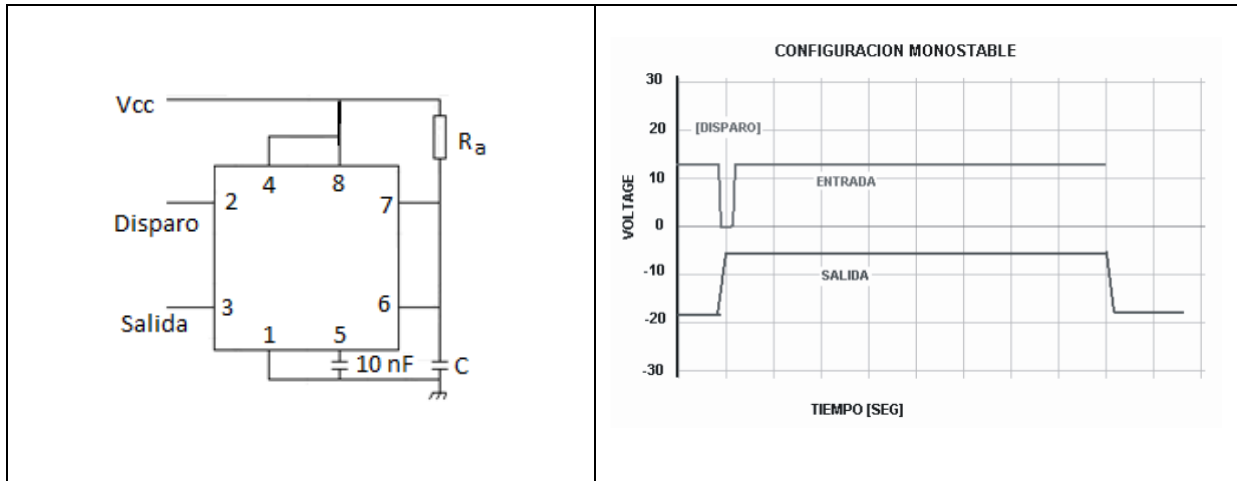
$$TB = 0.693R_bC$$

La frecuencia con que la señal de salida oscila está dada por la fórmula:

$$f_0 = \frac{1.44}{(R_a + 2R_b)C}$$

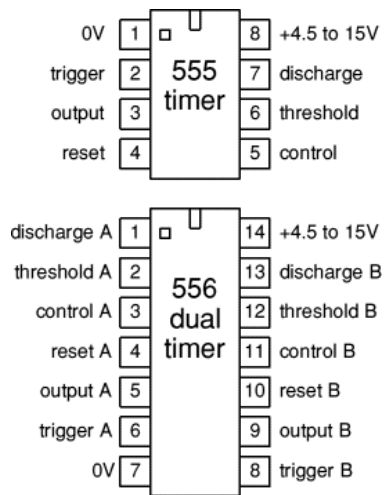
y el período es simplemente: $T = 1/f_0$

555/556 (monoestable)



El tiempo o periodo es igual a:

$$T = 1.1R_a C$$



La especificación mínima de muestras por segundo de una tarjetaDAQ

frecuencia mínima de muestreo = $2 \cdot f_{\max}$

Modulación y demodulación AM-FM

Modulación en amplitud

Señal moduladora

$$y_s(t) = A_s \cos(\omega_s t)$$

Señal portadora

$$y_p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$$

Señal modulada

$$y(t) = A_p [1 + mA_p x_n(t)] \cos(\omega_p t)$$

donde:

$y(t)$ = señal modulada

$x_n(t)$ = señal moduladora normalizada con respecto a su amplitud = $y_s(t) / A_s$

m = índice de modulación (suele ser menor que la unidad) = A_s / A_p

Índice de modulación en A.M.

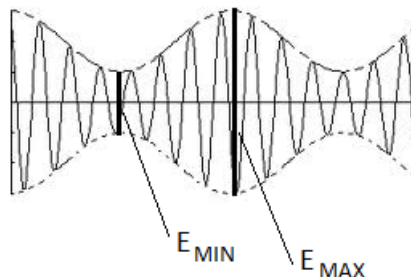
$$m = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}$$

donde:

$y(t)$ = señal modulada

$x_n(t)$ = señal moduladora normalizada con respecto a su amplitud

m = índice de modulación (suele ser menor que la unidad)



Factor de modulación:

$$m_t = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \dots}$$

donde:

m_t = índice de modulación total

m_1, m_2, m_3 = índice de modulación de las señales moduladoras

Potencia total transmitida

$$P_t = P_c + \frac{m^2}{4} P_c + \frac{m^2}{4} P_c$$

donde:

P_t = potencia total transmitida (W)

P_c = potencia de portadora (W)

m = índice de modulación

La expresión matemática de la señal modulada en frecuencia está dada por:

$$v(t) = V_p \sin \left[2\pi f_p t + \frac{\Delta f}{f_m} \cos(2\pi f_m t) \right]$$

El índice de modulación es:

$$m = \frac{\Delta f}{f_m}$$

donde:

m_f = índice de modulación

Δf = variación de la frecuencia de la portadora

F_m = frecuencia de la portadora

Decibel

$$dB = 10 \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)$$

El decibel referenciado a 1 mW

$$P(dBm) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_1}{1 \text{ mW}} \right)$$

Densidad de flujo (W/m^2)

$$S(dB_{W/m^2}) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_1}{1W/m^2} \right)$$

Decibel referenciado a μV

$$U(dB_{\mu V}) = 20 \log_{10} \left(\frac{U_1}{1\mu V} \right)$$

Acoplamiento de impedancias

Decibel en antenas

dBi = Ganancia de una antena referenciada a una antena isotrópica

dBd = Ganancia de una antena referenciada a una antena dipolo

dBq = Ganancia de una antena referenciada a una antena de un cuarto longitud de onda

Decibel en acústica

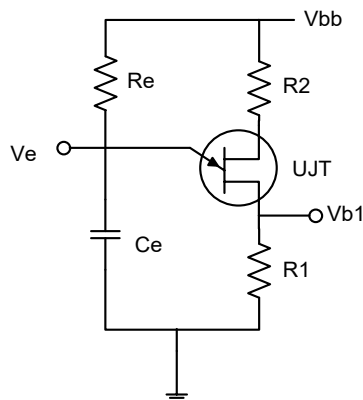
dB(SPL) = Nivel de presión del sonido relativo a 20 μPa

dB(PA) = dB relativo a un pascal

dB SIL = intensidad de nivel de sonido referenciado a $10 \times 10^{-12} W/m^2$

dB SWL = Nivel de potencia del sonido referenciado a $10 \times 10^{-12} W$

Oscilador de relajación UJT



donde:

$$V_p = V_d + V_a = V_d + nV_{bb}$$

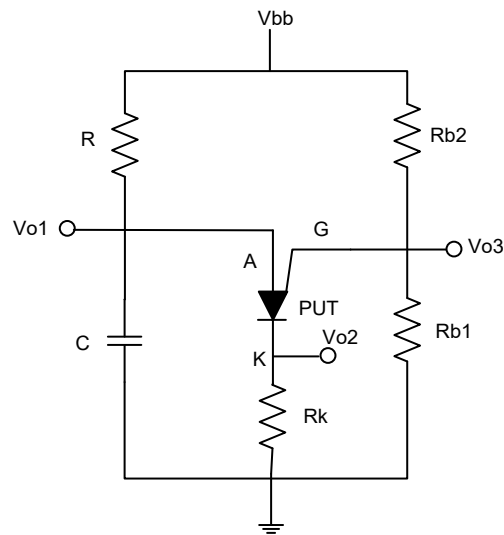
$$n = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_{bb}}$$

$$T = R_e C_e \ln \frac{1}{1-n}$$

$$R_{e\max} = \frac{(V_{bb} - V_p)}{I_p}$$

$$V_{bb} = R_{e\min} I_v + V_v$$

Oscilador de relajación PUT



donde:

$$V_g = \frac{V_{bb} R_{b1}}{R_{b1} + R_{b2}} = n V_{bb}$$

$$V_{ak} = V_p = V_d + V_g = 0.7 + n V_{bb}$$

$$T = RC \ln \frac{1 + R_{b1}}{R_{b2}}$$

$$R_{\max} = \frac{(V_{bb} - V_p)}{I_p}$$

$$R_{\min} = \frac{V_{bb} - V_v}{V}$$

Instrumentación

Valor promedio

$$A_{prom} = \frac{\text{área bajo la curva}}{\text{longitud del periodo}}$$

Siendo A_{prom} el valor promedio de la onda

$$A_{prom} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

El valor rms

$$A_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}$$

Señal senoidal	Rectificador de media onda (señal senoidal)
$A_{prom} = 0$ $A_{rms} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$	$A_{prom} = \frac{A_0}{\pi}$ $A_{rms} = \frac{A_0}{2}$
Rectificador de onda completa (señal senoidal)	Señal triangular
$A_{prom} = \frac{2A_0}{\pi}$ $A_{rms} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$	$A_{prom} = 0$ $A_{rms} = \frac{A_0}{\sqrt{3}}$
Señal cuadrada	Señal senoidal desplazada con CD
$A_{prom} = \frac{A_0}{2}$ $A_{rms} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$	$A_{prom} = A_0$ $A_{rms} = \sqrt{A_0^2 + \frac{1}{2}A_1^2}$

Errores en medición

$$\text{Error absoluto} = \text{Resultado} - \text{Valor verdadero}$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor verdadero}}$$

Puentes de Wheatstone

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$$

Puente ligeramente desbalanceado

$$R_{TH} = (R_1 \parallel R_3) + (R_2 \parallel R_x)$$

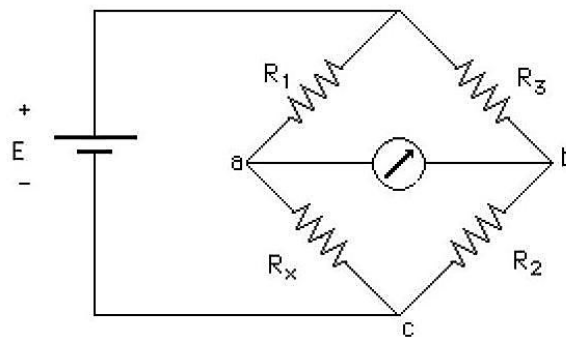
$$V_{TH} = V_0 \frac{R_3 \Delta R}{2R_3 R_x + R_3^2 + R_x^2}$$

Si las cuatro resistencias son iguales el puente esta en equilibrio por lo cual:

$$R_{TH} = R$$

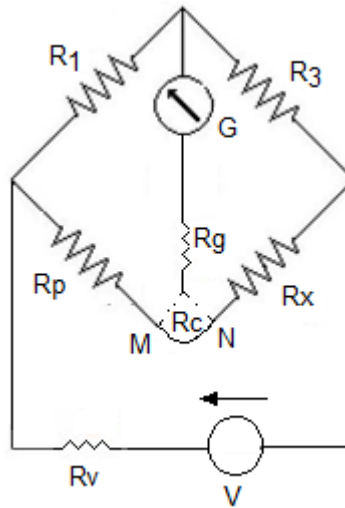
$$V_{TH} = V_0 \frac{\Delta R}{4R}$$

$$R_1 R_2 = R_3 R_x$$



Puente de Kelvin

$$\frac{R_5}{R_6} = \frac{R_1}{R_2}$$



Ruido térmico o ruido de Jhonson

$$E_n = \sqrt{4KTR(f_H - f_L)}$$

donde:

K = constante de Boltzman = 1.38×10^{-23} J/K

T = temperatura (K)

R = Valor de la resistencia (Ω)

f_H = frecuencia máxima de operación (Hz)

f_L = frecuencia mínima de operación (Hz)

Termopar

La relación de temperatura voltaje es:

$$V_0 = AT + BT^2$$

Características de los termopares				
Tipo	Composición	Rango de medición continua (°C)	Sensibilidad aprox. (μV/°C)	Notas
B	Platino 30% Rodio (+) Platino 6% Rodio (-)	50 a 1800	10	Fácilmente contaminado, requiere protección.
C	Tungsteno 5% Renio (+) Tungsteno 26% Renio (-)	0 a 2300		Sin resistencia a la oxidación. Para usos en vacío, hidrógeno o atmósferas inertes.
E	Cromel (+) Constantán (-)	-40 a 800	68	No someterlo a la corrosión en temperaturas criogénicas.
J	Hierro (+) Constantán (-)	-100 a 750	55	Recomendado en ambientes reductores o secos. El cable de hierro se oxida en altas temperaturas, por lo que se usan calibres gruesos para compensar.
K	Cromel (+) Alumel (-)	-180 a 1300	41	No recomendado en ambientes con presencia de azufre. Se usa en ambientes inertes o levemente oxidantes.
N	Nicrosil (+) Nisil (-)	-270 a 1300	39	Mayor resistencia a la oxidación y al sulfuro que el tipo "K"; estable a alta temperatura.
R	Platino 13% Rodio (+) Platino (-)	0 a 1600	10	Recomendado en atmósferas oxidantes. Fácil de contaminarse, requiere protección.
S	Platino 10% Rodio (+)	0 a 1600	10	Patrón de laboratorio, altamente reproducible.

Características de los termopares				
Tipo	Composición	Rango de medición continua (°C)	Sensibilidad aprox. (μV/°C)	Notas
	Aquí me quede Platino (-)			Buena resistencia a ambientes oxidantes, pobre resistencia a ambientes reductores.
T	Cobre (+) Constantán (-)	-185 a 400	43	El más estable en rangos de temperatura criogénica. Excelente en atmósferas reductoras y oxidantes dentro del rango de temperatura.

Termistor

El cambio de resistencia de los termistores en respuesta a cambios en la temperatura

$$\frac{1}{T} = A + B(\ln R) + C(\ln R)^3$$

donde:

T = temperatura (K)

R = resistencia del termistor (Ω)

A, B, C = constantes del ajuste de curva

La aproximación de la resistencia se obtiene con:

$$R = R_0 e^{\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

donde:

R = resistencia a la temperatura T (K)

R_0 = resistencia a T_0 (K)

β = constante del ajuste de curva

Sensores

Sensores resistivos

Potenciómetros

$$R = \frac{\rho}{A} l (1 - \alpha) = \frac{\rho}{A} (l - x)$$

donde:

x = distancia recorrida desde un punto fijo

α = fracción de longitud correspondiente en un punto fijo

ρ = coeficiente de resistividad del material

l = longitud del material

A = sección transversal del material

Galgas extensométricas

Las galgas extensométricas se basan en la variación de la resistencia de un conductor o un semiconductor cuando es sometido a un esfuerzo mecánico.

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Si se somete a un esfuerzo en la dirección longitudinal R cambia.

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dA}{A}$$

El cambio de longitud que resulta se determina a través de la ley de Hooke

$$\sigma = \frac{F}{A} = E\varepsilon = E \frac{dl}{l}$$

donde:

E = módulo de Young

σ = tensión mecánica

ε = deformación unitaria

Fotorresistencia

Energía de la radiación óptica

$$E = hf$$

donde:

E = energía

h = constante de Planck $6.62 \times 10^{-34} \text{Ws}^2$

f = frecuencia

Para la longitud de onda de radiación

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

donde:

c = velocidad de la luz

h = constante de Plack

$E = 1.602\text{E-}19 \text{ J}$

Sensores capacitivos

Condensadores variables

$$C \approx \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} (n - 1)$$

donde:

A = área de las placas

d = distancia entre pares de placas

ε_r = constante dieléctrica relativa

$\varepsilon_0 = 8.85 \text{ pF/m}$

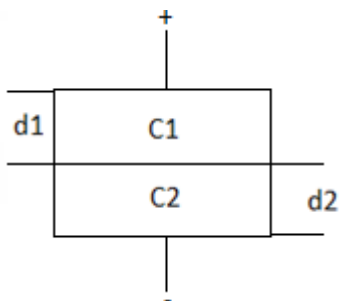
Los sensores capacitivos no son lineales, su linealidad depende del parámetro que varía y del tipo de medición. En un condensador plano, si varía A o ε_r por lo cual:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d(1 + \alpha)}$$

donde:

$$\alpha = \frac{d}{x}$$

Condensador diferencial



$$C_1 = \frac{\epsilon A}{d_1 + x}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon A}{d_2 - x}$$

$$V_i = V \frac{\frac{1}{d_i - x}}{\frac{1}{d_i + x} + \frac{1}{d_i - x}} = V \frac{d_i - x}{2d_i}$$

Por lo cual, para el caso en que d_1 y d_2 , se tiene:

$$V_1 - V_2 = V \frac{x}{d}$$

Sensores inductivos

La inductancia se expresa como:

$$L = N \frac{d\phi}{di}$$

donde:

N = número de vueltas del circuito

i = corriente

ϕ = flujo magnético

El flujo magnético se obtiene con:

$$\Phi = \frac{M}{R}$$

donde:

M = fuerza electromotriz

R = reluctancia

Para una bobina de sección A y de longitud l , la reluctancia es:

$$R = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{A}$$

Sensores electromagnéticos

Sensor basado en la ley de Faraday

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

Tacogeneradores

La tensión inducida por el generador es:

$$e = NBA\omega \int \sin \omega t dt$$

Si ω es constante

$$e = -NBA\omega \cos \omega t$$

Sensores de velocidad lineal

$$e = Blv$$

donde:

L = longitud del conductor

v = velocidad lineal

Sensores de efecto Hall

$$A_H = \frac{V_H t}{IB}$$

Aportación de magnitud y fase para cada término de la función de transferencia

Término	Magnitud logarítmica	Ángulo de fase	Magnitud logarítmica	Ángulo de fase
K	$20 \log K$	$\phi = 0^\circ$	$20 \log K$	$\phi = 0^\circ$
$j\omega$	$20 \log \omega$	$\phi = 90^\circ$	Línea diagonal con pendiente 20 dB/dec que cruza el punto ($\omega=1, db=0$)	$\phi = 90^\circ$
$\frac{1}{j\omega}$	$-20 \log \omega$	$\phi = -90^\circ$	Línea diagonal con pendiente -20 dB/dec que cruza el punto ($\omega=1, db=0$)	$\phi = -90^\circ$
$j\omega\tau + 1$	$20 \log \omega\tau$	$\phi = \tan^{-1} \omega\tau$	0 db, hasta la frecuencia de corte. $\omega = \frac{1}{\tau}$ Pendiente 20 dB/dec a partir de $\omega > \frac{1}{\tau}$	de $\phi = 0^\circ$ a 90° en $\omega = \frac{1}{\tau} = 45^\circ$
$\frac{1}{j\omega\tau + 1}$	$-20 \log \omega\tau$	$\phi = -\tan^{-1} \omega\tau$	0 db, hasta la frecuencia de corte $\omega = \frac{1}{\tau}$ Pendiente - 20 dB/dec a partir de $\omega > \frac{1}{\tau}$	de $\phi = 0^\circ$ a -90° en $\omega = \frac{1}{\tau} = -45^\circ$
$-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{j\omega}{\omega_n} + 1$	$40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$	$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$	Línea horizontal 0 db hasta $\omega = \omega_n$ Pendiente 40 dB/dec para $\omega > \omega_n$	de $\phi = 0^\circ$ a 180° en $\omega = \omega_n = 90^\circ$
$\frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{j\omega}{\omega_n} + 1}$	$-40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$	$\phi = -\tan^{-1} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right]$	Línea horizontal 0 db hasta $\omega = \omega_n$ Pendiente -40 dB/dec para $\omega > \omega_n$	de $\phi = 0^\circ$ a -180° en $\omega = \omega_n = -90^\circ$
$e^{-j\omega t_0}$	0	$\phi = -57.3\omega t_0$	0	$\phi = -57.3\omega t_0$

Transformada Z

La TZ bilateral de una señal definida en el dominio del tiempo discreto $x[n]$ es una función $X(z)$ que se define:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

donde:

n = un entero

z = un número complejo

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Tablas adicionales de datos prácticos

Sistema de unidades eléctricas. Fórmulas fundamentales en CD

Magnitud		Sistema				Fórmulas más utilizadas para su cálculo
		MKSI		CGSEM		
		Unidad	Símbolo	Unidad	Símbolo	
Desplazamiento o inducción	I, i	Ampere	A			I=V/R
Cantidad de electricidad	Q	Coulomb	Q			Q=I·t
d.d.p. o tensión	U	Volt	V			V=R·I
Resistencia	R	Ohm	Ω			R=V/I
Capacidad	C	Farad	F			C=Q/V
Campo eléctrico y gradiente de potencia	E	V/m	--			E=F/Q
Desplazamiento o inducción electrostática	D	Q/m²	--			D=ε·E
Inducción magnética	B	Tesla	W/m²	Gauss	Gs	β=1.25 · N · I · μ/L (Gs)
Campo magnético	H	A/m	--	Oersted	Oe	H=1.25 · N · I/L (Oe)
Permeabilidad	μ	--	--			μ=β/H
Flujo magnético	Φ	Weber	Wb	Maxwell	Mx	Φ=1.25·N·I·μ·S/L (mx)
Fuerza magnetomotriz		Ampere	At, A	Gisbert	Gb	ε=1.25 · N · I
.Inductancia	L	Henry	H			L=N·φ/10 ⁸ ·I
Reluctancia	R	At/Wb				R=I/S·μ
Intensidad luminosa	I	Candela	Cd			I=φ/ω
Flujo luminoso	Φ	Lumen	lm			Φ=Q/t
Cantidad de luz	Q	lm/s	--			--
Iluminación	E	Lux	lx			E=φ/S
Brillo		Stilb	sb			Sb=1 cd/1 cm ² 1 nit= 1 cd/1 m ²

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Resistividad ρ y conductividad γ de conductores (a 20 °C)

Material	$\frac{\rho}{m}$	$\gamma = \frac{1}{\rho}$	Material	$\frac{\rho}{m}$	$\gamma = \frac{1}{\rho}$
Acero dulce	0.1300	7.700	Latón Ms 63	0.0710	14.00
Aluminio	0.0278	36.00	Magnesio	0.0435	23.00
Antimonio	0.4170	2.400	Manganina	0.4230	2.370
Cadmio	0.0760	13.10	Mercurio	0.9410	1.063
Carbón	40.000	0.025	Níquel	0.0870	11.50
Cobre (eléc.)	0.0175	57.00	Niquelina	0.5000	2.000
Constantán	0.4800	2.080	Oro	0.0222	45.00
Cromo-Ni-Fe	0.1000	10.00	Plata	0.0160	62.50
Estaño	0.1200	8.300	Plata alemana	0.3690	2.710
Hierro fundido	1.0000	1.000	Platino	0.1110	9.000
Hierro (puro)	0.1000	10.00	Plomo	0.2080	4.800
Grafito	8.0000	0.125	Tungsteno	0.0590	17.00
Latón Ms 58	0.0590	17.00	Zinc	0.0610	16.50

Resistividad de ρ aislantes

Material	$\Omega \cdot m$	Material	$\Omega \cdot m$
Aceite de parafina	10^{18}	Mica	10^{17}
Agua de mar	10^6	Parafina (pura)	10^{18}
Agua destilada	10^7	Plexiglás	10^{15}
Ámbar comprimido	10^{18}	Poliestireno	10^{18}
Baquelita	10^{14}	Porcelana	10^{14}
Caucho (hule) duro	10^{18}	Tierra húmeda	10^8
Mármol	10^{10}	Vidrio	10^{15}

Coefficiente térmico de resistencia α_{20} (a 20 °C)

Material	$^{\circ}C^{-1}$	Material	$^{\circ}C^{-1}$
Acero dulce	+ 0.00660	Manganina	+/- 0.00001
Aluminio	+ 0.00390	Mercurio	+ 0.00090
Carbón	-0.00030	Níquel	+ 0.00400
Cobre	+0.00380	Niquelina	+ 0.00023
Constantán	-0.00003	Plata	+ 0.00377
Estaño	+ 0.00420	Plata alemana	+ 0.00070
Grafito	-0.00020	Platino	+ 0.00390
Latón	+ 0.00150	Zinc	+ 0.00370

Constante dieléctrica ϵ_r

Material aislante	ϵ_r	Material aislante	ϵ_r	Material aislante	ϵ_r
Aceite de oliva	3	Caucho (hule) duro	4	Papel Kraft	4.5
Aceite de parafina	2.2	Caucho (hule) suave	2.5	Papel pescado	4
Aceite de ricino	4.7	Compuesto (compound)	2.5	Parafina	2.2
Aceite mineral para transformadores	2.2	Cuarzo	4.5	Petróleo	2.2
Aceite vegetal para transformadores	2.5	Ebonita	2.5	Pizarra	4
Agua	80	Esteatita	6	Plexiglás	3.2
Aire	1	Fibra vulcanizada	2.5	Poliamida	5
Aislamiento para cable alta tensión	4.2	Gutapercha	4	Poliestireno	3
Aislamiento para cable telefónico	1.5	Laca (Shellac)	3.5	Porcelana	4.4
Araldita	3.6	Mármol	8	Resina fenólica	8
Baquelita	3.6	Mica	6	Teflón	2
Cartón comprimido	4	Micanita	5	Tela	4
		Papel	2.3	Trementina (aguarrás)	2.2
		Papel impregnado	5	Vidrio	5

Serie de potenciales electroquímicos

Diferencia de potencial referida a electrodo de hidrógeno

Material	Volts	Material	Volts	Material	Volts
Aluminio	-1.66	Hidrógeno	0.00	Platino	+1.20
Berilio	-1.85	Hierro	-0.41	Plomo	-0.13
Cadmio	-0.40	Magnesio	-2.37	Potasio	-2.93
Calcio	-2.87	Manganeso	-1.19	Sodio	-2.71
Cobalto	-0.28	Mercurio	+0.85	Tungsteno	-0.58
Cobre	+0.34	Níquel	-0.23	Zinc	-0.76
Cromo	-0.74	Oro	+1.50		
Estaño	-0.14	Plata	+0.80		

Números estandarizados mediante una razón progresiva

Serie E 6 ($\approx \sqrt[6]{10}$)			Serie E 12 ($\approx \sqrt[12]{10}$)			Serie E 24 ($\approx \sqrt[24]{10}$)		
1.0	2.2	4.7	1.0	2.2	4.7	1.0	2.2	4.7
						1.1	2.4	5.1
			1.2	2.7	5.6	1.2	2.7	5.6
						1.3	3.0	6.2
1.5	3.3	6.8	1.5	3.3	6.8	1.5	3.3	6.8

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

						1.6	3.6	7.5
			1.8	3.9	8.2	1.8	3.9	8.2
						2.0	4.3	9.1
10	22	47	10	22	47	10	22	47
etc.			etc.			etc.		

Intensidad de campo h y permeabilidad relativa μ_r en función de la inducción magnética b deseada

Inducción o densidad de flujo		Hierro fundido		Acero fundido y lámina tipo "dynamo" $\rho_{Fe10} = 3.6 \frac{W}{kg}$		Lámina de acero aleado $\rho_{Fe10} = 1.3 \frac{W}{kg}$	
B		H	μ_r	H	μ_r	H	μ_r
Tesla ($T=Vs/m^2$)	Gauss(Gs)	A/m		A/m		A/m	
0.1	1 000	440	181	30	2 650	8.5	9 390
0.2	2 000	740	215	60	2 650	25	6 350
0.3	3 000	980	243	80	2 980	40	5 970
0.4	4 000	1 250	254	100	4 180	65	4 900
0.5	5 000	1 650	241	120	3 310	90	4 420
0.6	6 000	2 100	227	140	3 410	125	3 810
0.7	7 000	3 600	154	170	3 280	170	3 280
0.8	8 000	5 300	120	190	3 350	220	2 900
0.9	9 000	7 400	97	230	3 110	280	2 550
1.0	10 000	10 300	77	295	2 690	355	2 240
1.1	11 000	14 000	63	370	2 360	460	1 900
1.2	12 000	19 500	49	520	1 830	660	1 445
1.3	13 000	29 000	36	750	1 380	820	1260
1.4	14 000	42 000	26	1 250	890	2 250	495
1.6	16 000			3 500	363	8 500	150
1.7	17 000			7 900	171	13 100	103
1.8	18 000			12 000	119	21 500	67
1.9	19 000			19 100	79	39 000	39
2.0	20 000			30 500	52	115 000	14
2.1	21 000			50 700	33		
2.2	22 000			130 000	13		
2.3	23 000			218 000	4		

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Valores para lámina tipo “dynamo” (de la norma din 46 400)

Clase			Lámina normal	Lámina de aleación		
				Baja	Mediana	Alta
Tipo			I 3.6	II 3.0	III 2.3	IV 1.5
Tamaño mm x mm			1 000 x 2 000			750 x 1 500
Espesor, mm			0.5			0.35
Densidad, kg/dm ³			7.8	7.75	7.65	7.6
Valor máximo de las pérdidas, W/kg	ρ_{Fe10}		3.6	3.0	2.3	1.5
	ρ_{Fe10}		8.6	7.2	5.6	3.7
Valor mínimo de la inducción	B_{25}	Tesla Gauss	1.53 15 300	1.50 15 300	1.47 14 700	1.43 14 300
	B_{50}	Tesla Gauss	1.63 16 300	1.60 16 000	1.57 15 700	1.55 15 500
	B_{100}	Tesla Gauss	1.73 17 300	1.71 17 100	1.69 16 900	1.65 16 500
	B_{300}	Tesla Gauss	1.98 19 800	1.95 19 500	1.93 19 300	1.85 18 500

Explicaciones: B_{25} = 1.53 tesla significa que una inducción o densidad de flujo mínima de 1.53 T se alcanzará con una intensidad de campo de 25 A/cm. Para una línea de flujo de, p. ej., 5 cm, se necesitarán: $5 \times 25 = 125$ A.

ρ_{Fe10}	Pérdidas magnéticas por unidad de masa con las inducciones de:	10 000 Gs = 1.0 tesla
ρ_{Fe15}		15 000 Gs = 1.5 tesla

Los valores corresponden a las siguientes condiciones:

Densidad a $t=15$ °C

Temperaturas (o puntos) de fusión y de ebullición para $p = 1.0132$ bar = 760 Torr

Los valores entre paréntesis indican sublimación, o sea, cambio directo del estado sólido al gaseoso.

Conductividad térmica a 20 °C

Capacidad térmica específica (o calor específico) para el intervalo de temperaturas $0 < t < 100$ °C

Formulario para el sustentante del

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO)

Subdirección de Evaluación de Egreso Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Puntos de					
Sustancia	Densidad ρ	Fusión (soldf.)	Ebullición	Conductividad térmica k	Calor específico c
	kg/dm ³	°C	°C	W/(mK) ⁽¹⁾	kJ/(kgK) ⁽²⁾
Aceite de colza	0.91 ⁽³⁾	-3.5	300	0.17	1.97
Aceite de linaza	0.94 ⁽³⁾	-20	316	0.15	
Aceite para calefacción	0.92 ⁽³⁾	-5	175-350	0.12	
Aceite para máquinas	0.91	-5	380-400	0.126	1.67
Aceite para transformadores	0.87	-5	170	0.15	1.84
Acero	7.85	~1 350	2 500	47-58	0.46
Acero colado	7.8	~1 350		52.3	0.502
Acero dulce	7.85	~1 400	2 500	46.5	0.461
Acero de alta velocidad	8.4-9.0	~1 650	2 600	25.6	0.498
Acetona	0.79 ⁽³⁾		56.1		
Ácido acético	1.08	16.8	118		
Ácido cianhídrico	0.7	-15	27		
Ácido clorhídrico 10%	1.05	-14	102	0.50	3.14
Ácido clorhídrico 40%	1.20				
Ácido fluorhídrico	0.99	-92.5	19.5		
Ácido nítrico	1.56 ⁽⁴⁾	-1.3	86	0.53	2.72
Ácido sulfúrico	1.49 ⁽⁵⁾	-73	-10		1.34
Ácido sulfúrico 50%	1.40				
Ácido sulfúrico concentrado	1.84	10-0	338	0.5	1.38
Ágata	~2.6	~1 600	~2 600	11.20	0.80
Agua	1.0 ⁽⁶⁾	0	100	0.58	4.183
Alcohol	0.79	-130	78.4	0.17-0.23	2.42
Alcohol etílico 95%	0.82 ⁽³⁾	-90	78	0.16	
Alcohol metílico	0.8	-98	66		2.51

Consejo Técnico

Representantes de Instituciones de Educación Superior

Dr. Arnulfo Luis Ramos
**Benemérita Universidad Autónoma de
Puebla**

Dr. Julio César Rodríguez Quiñonez
**Universidad Autónoma de Baja
California**

M.C. Arturo Javier Escoto Méndez
**Centro de Enseñanza Técnica y
Superior**

Dra. Elvia Ruth Palacios Hernández
**Universidad Autónoma de San Luis
Potosí**

Ing. Rafael Bencomo Hernández
Instituto Tecnológico Superior de Lerdo

M.C. Juan Carlos Aldaz Rosas
Universidad de Guadalajara

Dr. Raúl Crespo Saucedo
Tecnológico de Monterrey

Ing. Enrique Martínez Pérez
**Universidad Politécnica de
Aguascalientes**

Dr. Luis Alejandro Flores Oropeza
**Universidad Autónoma de
Aguascalientes**

Este Formulario es un instrumento de apoyo para quienes sustentarán el Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica (EGEL-IELECTRO) y está vigente a partir de enero de 2020.

El Formulario para el sustentante es un documento cuyo contenido está sujeto a revisiones periódicas. Las posibles modificaciones atienden a los aportes y críticas que hagan los miembros de las comunidades académicas de instituciones de educación superior de nuestro país, los usuarios y, fundamentalmente, las orientaciones del Consejo Técnico del examen.

El Ceneval y el Consejo Técnico del EGEL-IELECTRO agradecerán todos los comentarios que puedan enriquecer este material. Sírvese dirigirlos a:

Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C.

Subdirección de Evaluación de Egreso

en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Av. Camino al Desierto de los Leones (Altavista) 37,

Col. San Ángel, Álvaro Obregón,

C.P. 01000, Ciudad de México.

Tel: 55 53 22 92 00 ext. 5103

www.ceneval.edu.mx

eloin.alarcon@ceneval.edu.mx

El Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior es una asociación civil sin fines de lucro constituida formalmente el 28 de abril de 1994, como consta en la escritura pública número 87036 pasada ante la fe del notario 49 del Distrito Federal.

Sus órganos de gobierno son la Asamblea General, el Consejo Directivo y la Dirección General. Su máxima autoridad es la Asamblea General, cuya integración se presenta a continuación, según el sector al que pertenecen los asociados:

Asociaciones e instituciones educativas: Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior, A.C.; Federación de Instituciones Mexicanas Particulares de Educación Superior, A.C.; Instituto Politécnico Nacional; Tecnológico de Monterrey; Universidad Autónoma del Estado de México; Universidad Autónoma de San Luis Potosí; Universidad Autónoma de Yucatán; Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla; Universidad Tecnológica de México.

Asociaciones y colegios de profesionales: Barra Mexicana Colegio de Abogados, A.C.; Colegio Nacional de Actuarios, A.C.; Colegio Nacional de Psicólogos, A.C.; Federación de Colegios y Asociación de Médicos Veterinarios y Zootecnistas de México, A.C.; Instituto Mexicano de Contadores Públicos, A.C.

Organizaciones productivas y sociales: Academia de Ingeniería, A.C.; Academia Mexicana de Ciencias, A.C.; Academia Nacional de Medicina, A.C.; Fundación ICA, A.C.

Autoridades educativas gubernamentales: Secretaría de Educación Pública.

El Centro está inscrito desde el 10 de marzo de 1995 en el Registro Nacional de Instituciones Científicas y Tecnológicas del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, con el número 506.

También es miembro en:

- el International Association for Educational Assessment
- la European Association of Institutional Research
- el Consortium for North American Higher Education Collaboration
- el Institutional Management for Higher Education de la OCDE



CENTRO NACIONAL
DE EVALUACIÓN PARA
LA EDUCACIÓN SUPERIOR, A.C.

CENEVAL®

Dirección de los EGEL

ENERO • 2021