



CENTRO NACIONAL
DE EVALUACIÓN PARA
LA EDUCACIÓN SUPERIOR, A.C.

CENEVAL®

formulario

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería
Mecatrónica

Dirección de los EGEL

ENERO • 2021

Formulario

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica

EGEL-IMECATRO



Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C.

Formulario

D. R. © 2020
Centro Nacional de Evaluación
para la Educación Superior, A. C. (Ceneval)

Decimotercera edición

Directorio

Antonio Ávila Díaz
Director General

Alejandra Zúñiga Bohigas
Directora de los Exámenes
Generales para el Egreso de la Licenciatura

Wilson Jesús Pool Cibrián
Subdirector de Evaluación de Egreso en
Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Nancy Rodríguez Huerta
Responsable del Examen General para el Egreso
de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica

Contenido

INTEGRACIÓN DE TECNOLOGÍAS PARA EL DISEÑO MECATRÓNICO	9
ESFUERZOS Y DEFORMACIONES.....	9
RAZÓN DE POISSON	9
LEY DE HOOKE GENERALIZADA	9
ESFUERZOS CORTANTES Y DEFORMACIÓN TRANSVERSAL	9
ESFUERZO Y DEFORMACIÓN DEBIDOS A TORSIÓN	9
ESFUERZOS POR FLEXIÓN Y CORTANTE AXIAL	10
DEFLEXIÓN EN VIGAS, MÉTODO DE INTEGRACIÓN	10
CARGA CRÍTICA EN COLUMNAS.....	10
COMPORTAMIENTO MECÁNICO (RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN)	10
MOTORES-ENGRANES.....	11
VIDA ÚTIL DE UN BALERO	12
MOMENTOS	13
MECANISMO BIELA MANIVELA	13
RESORTE HELICOIDAL DE TORSIÓN	14
COEFICIENTE DE CAUDAL	14
ENERGÍA	15
CARGA.....	15
CORRIENTE	17
VOLTAJE	17
RESISTENCIA	17
AUTOMATIZACIÓN DE SISTEMAS	33
TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE	33
TEOREMAS DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE	33
EXPANSIÓN EN FRACCIONES PARCIALES	34
TIPOS DE RESPUESTA	35
REGLA DE MASON	37
CONTROLADORES PID.....	37
TABLA DE PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z	41
TABLA DE TRANSFORMADA $-Z$ Y TRANSFORMADA $-Z$ MODIFICADA.....	42
PROCESOS DE MÁQUINAS-HERRAMIENTAS	43
CONFIGURACIONES BÁSICAS DE AMPLIFICADORES OPERACIONALES	46
PUENTE DE WHEATSTONE.....	47
COEFICIENTE ALFA DE CRONBACH	47
CAMBIOS DE BASE NUMÉRICA	48
DESARROLLO Y COORDINACIÓN DE PROYECTOS MECATRÓNICOS	49
CALIDAD.....	49
REDES (DIAGRAMA PERT)	50
TOMA DE DECISIONES (ÁRBOLES DE DECISIÓN)	50
BALANCEO DE LÍNEAS DE ENSAMBLE	51
SECUENCIACIÓN DE TAREAS	51
INVENTARIOS	52
TIEMPO ESTÁNDAR	53
PUNTO DE EQUILIBRIO.....	53
INGENIERÍA ECONÓMICA	54
ROTACIÓN DE INVENTARIOS.....	55
ANÁLISIS DE LA DEUDA	55
ANÁLISIS DE LA RENTABILIDAD	55
ANÁLISIS DE LA LIQUIDEZ.....	56
ESTADÍSTICA PARA LA ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES	56
ANEXOS	59

MATEMÁTICAS	59
Sistemas de coordenadas	61
Vectores.....	62
Integrales múltiples.....	63
Trigonometría.....	65
Funciones trigonométricas.....	66
Ley de los senos	67
$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$	67
Ley de los cosenos.....	67
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	67
Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar	67
Ley de las tangentes	67
$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$	67
Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar	67
Números complejos.....	68
Resolución geométrica de ecuaciones.....	69
Álgebra	71
Series de Fourier.....	74
Cálculo diferencial	77
Cálculo integral.....	81
Aplicaciones de la integración.....	88
FISICA.....	91
Cinemática	91
Dinámica.....	91
Electricidad y magnetismo.....	92
Teorema de ejes paralelos	99
la sección considerada	99
$Y = Y_n A_n A T$	99
$Y =$ Distancia al centroide de la sección desde la referencia marcada.....	99
$Y_n =$ Distancia desde la referencia al centroide de la sección del area.....	99
Momento de inercia de la sección compuesta.....	99
Momentos de inercia de volúmenes.....	100
ANÁLISIS DIMENSIONAL Y TEORÍA DE SEMEJANZA	103
TABLAS CARACTERÍSTICAS DE LOS FLIP FLOPS.....	104
TABLAS DE EXCITACIÓN DE LOS FLIP FLOPS JK Y T	104
CONSEJO TÉCNICO	105

Integración de tecnologías para el diseño mecatrónico

Esfuerzos y deformaciones

$$\sigma = \frac{F}{A}; \quad FS = \frac{\sigma_{Yp}}{\sigma_d}; \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L}; \quad \sigma = E\varepsilon; \quad \delta = \frac{PL}{AE}$$

Razón de Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}}$$

Ley de Hooke generalizada

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

donde

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Esfuerzos cortantes y deformación transversal

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}; \quad \tau = G\gamma$$

Esfuerzo y deformación debidos a torsión

$$\tau = \frac{Tc}{J}; \quad \phi = \frac{TL}{JG};$$

Potencia

$$P = T\omega; \quad \omega = 2\pi f$$

Esfuerzos por flexión y cortante axial

$$\sigma = -\frac{Mc}{I}; \quad \tau = \frac{VQ}{I_t}$$

Deflexión en vigas, método de integración

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Carga crítica en columnas

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}; \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_2}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$$

Comportamiento mecánico (relaciones esfuerzo-deformación)

$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \quad \varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}; \quad \sigma = E\varepsilon; \quad \Delta l = \frac{FL}{AE};$$

$$\%RA = \left(\frac{A_o - A_f}{A_o}\right) \times 100; \quad \%El = \left(\frac{l_f - l_o}{l_o}\right) \times 100$$

$$\sigma_{flexión} = \frac{3FL}{2wh^2};$$

$$K = f\sigma\sqrt{\pi a}; \quad F(V) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right];$$

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n; \quad LM = \left(\frac{T}{1000}\right)(A + B \ln t); \quad \sigma_t = \frac{F}{A}; \quad \varepsilon_t = \ln\left(\frac{A_o}{A_f}\right); \quad \sigma_t = k\varepsilon_t^n;$$

Comportamiento mecánico (dureza Brinell)

$$HB = \frac{2F}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - D_i^2})};$$

Motores-engranes

$$P_{HP} = \left(\frac{\tau \omega}{33000} \right)$$

$$D = \frac{N}{p}$$

P_{HP} = potencia (*Horse Power*)

T = torsión (par) lb·in

N = revoluciones por minuto (rpm)

D = diámetro de paso (in)

ω = velocidad angular (rpm)

p = paso diametral

Módulo

$$m = \frac{D}{N}$$

m = módulo del engranaje

D = diámetro de paso

N = número de dientes

Relación de velocidades

$$m_v = \frac{N_e}{N_s} = \frac{D_e}{D_s} = \frac{\omega_s}{\omega_e}$$

m_v =relación de velocidades

N_e =número de dientes en el engrane de entrada

N_s = número de dientes en el engrane de salida

D_e =diámetro de paso del engrane de entrada

D_s = diámetro de paso del engrane de salida

ω_e = velocidad angular del engrane de entrada

ω_s = velocidad angular del engrane de salida

Fuerza tangencial en un engrane recto

$$W_t = \frac{T}{r} = \frac{2pT}{N}$$

W_t = fuerza tangencial

T = Par torsor

r = radio de paso

N = número de dientes

p = paso diametral

Vibraciones

$$\text{Frecuencia}_{\text{resonancia}} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

$$J = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{1}{2} \pi R^4$$

$$\theta = \frac{TL}{JG}$$

$$\tau = \frac{Tc}{J}$$

$$\tau_{max, eje hueco} = \frac{2TR_E}{\pi(R_E^4 - R_I^4)} = \frac{16TD_E}{\pi(D_E^4 - D_I^4)}$$

$$P = 2\pi T f$$

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} = \frac{2T}{\pi R^3} = \frac{16T}{\pi D^3}$$

τ = esfuerzo cortante por torsión
 θ = deformación (ángulo de torsión)
D = diámetro de la flecha
F = frecuencia en revoluciones por segundo (también llamados hertz)
G = módulo de elasticidad para cortante
J = momento polar de inercia
L = longitud de la flecha
T = par torsor en N·m o lb·in
P = potencia transmitida en watts (N·m/s)
R = distancia del plano neutro al punto interior de interés ($r \geq R$)
R = radio de la flecha

Conversión de grados a radianes: multiplicar por 0.0175

Conversión de radianes a grados: multiplicar por 57.3

1 HP = 33 000 lb·ft/min (caballo de potencia)

1 CV = 736 W (caballo de vapor)

Par a la salida de un motor jaula de ardilla

$$T_{sal\ mot} = 716200 \times HP / (rpm) \text{ (kg mm)}$$

Vida útil de un balero

$$L_{10} = (C/P)^p$$

En donde:

L10= vida nominal básica en millones de revoluciones

C = capacidad de carga dinámica(N)

P = capacidad dinámica equivalente (N)

p = 3 para baleros de bolas

p = 10/3 para baleros de rodillos

Momentos

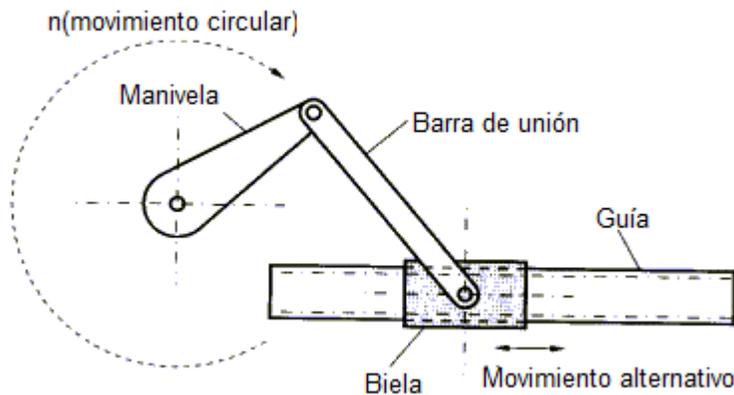
$$M = F \cdot d$$

En donde:

F = fuerza aplicada

d = distancia perpendicular de la línea de acción de la fuerza al punto de aplicación

Mecanismo biela manivela



Velocidad media:

$$V_m = 2\bar{\omega}R/\bar{\omega}$$

Donde:

V_m = velocidad media

$\bar{\omega}$ = velocidad de giro de la manivela

R = brazo de la manivela

Velocidad máxima

$$V_M = \bar{\omega}R$$

Donde:

$\bar{\omega}$ = velocidad de giro de la manivela (en rad/seg)

R = brazo de la manivela

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
 Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Resorte helicoidal de torsión

(El ángulo de torsión α se debe expresar en grados)

Torsión máxima permanente

$$\alpha_{m\acute{a}x} = \frac{(57.3) I S_f \sigma_{f(perm)}}{f E}$$

Carga máxima permanente

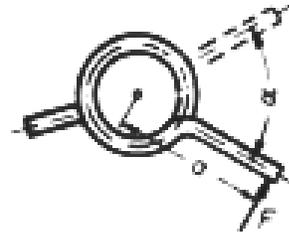
$$F_{m\acute{a}x} = \frac{S_f \sigma_{f(perm)}}{a}$$

Torsión (desplazamiento angular)

$$\alpha = \frac{(57.3) F a l}{I E}$$

Longitud de una espira

$$l = \frac{\alpha I E}{(57.3) F a}$$



Coefficiente de caudal

Cuando el flujo pasa a través de una válvula u otro dispositivo restrictivo pierde una energía. El **coeficiente de caudal** es un factor de diseño que relaciona la diferencia de altura (Δh) o presión (ΔP) entre la entrada y salida de la válvula con el caudal (Q).

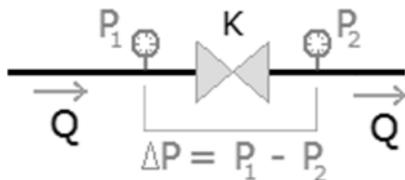
$$Q = K \cdot \sqrt{\frac{\Delta P}{SG}} \text{ (líquidos)}$$

Q= Caudal

ΔP = Diferencia de presión

SG= Gravedad específica (1 para agua)

K= Coeficiente de caudal o Cv



Energía

Energía en una resistencia

La energía W consumida en un tiempo t , para entregar una potencia constante P disipada en una resistencia R atravesada por una corriente I con una caída de Voltaje V :

$$W = P t = V I t = V^2 t / R = I^2 R t$$

$$P = VI$$

$$P = \frac{V^2}{R}$$

$$P = I^2 R$$

$$V = RI$$

Para obtener el resultado en calorías: 1 cal = 4.186 J

Energía almacenada en el campo capacitivo

La energía W almacenada en el campo de una capacidad C para alcanzar un voltaje V con una carga Q es:

$$W = (C \cdot V^2) / 2 = (Q \cdot V) / 2 = Q^2 / 2 C$$

Energía almacenada en el campo inductivo

La energía W almacenada en el campo de una inductancia L para llevar una corriente I con un flujo concatenado Y :

$$W = (L \cdot I^2) / 2 = (Y \cdot I) / 2 = Y^2 / 2 L$$

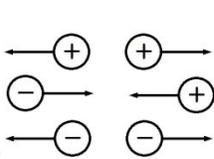
Donde el flujo concatenado Y es igual al producto del número de vueltas N de la inductancia por el flujo magnético F :

$$Y = N F = L I$$

Carga

Es una propiedad que tienen algunas de las partículas de los átomos que forman la materia. Se dice que los materiales están cargados cuando, por algún motivo, tienen un exceso o defecto de carga.

* Hay dos tipos de carga: positiva (+) y negativa (-). Dos cargas con el mismo signo se repelen y con distinto signo se atraen, y su fuerza de atracción crece con la cantidad de carga y decrece con la distancia según la ley de Coulomb:



$$F = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad \leftarrow \text{Ley de Coulomb}$$

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

* La constante dieléctrica relativa ϵ_r depende del material. Para el aire (o para el vacío) vale 1.

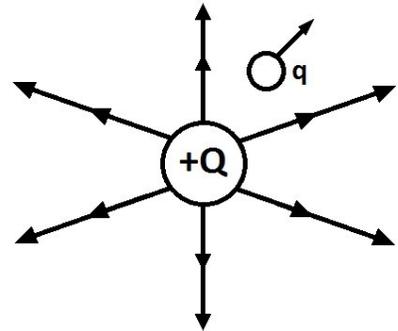
Campo eléctrico

Es la fuerza eléctrica por unidad de carga.

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}}{q} \quad [E] = \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} = \frac{\text{Volt}}{\text{metro}}$$

Para una carga puntual q, el campo eléctrico viene dado por:

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{\epsilon_r \cdot r^2} \quad \leftarrow \text{Campo eléctrico}$$



Donde:

$\vec{F}(r)$ = Fuerza eléctrica

q = carga puntual

ϵ_r = La constante dieléctrica relativa Para el aire (o para el vacío) vale 1.

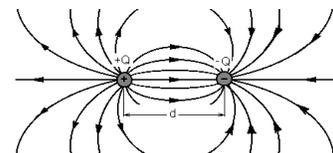
K = depende del medio que rodea las cargas. Para el vacío = $9 \times 10^9 \text{ Nm/C}^2$

Líneas de fuerza (o de campo)

Son todas las trayectorias que describiría una carga de prueba si la soltáramos cerca de la carga que produce el campo.

- Líneas de fuerza de un dipolo→

- Las líneas de campo siempre van de (+) → (-)



Potencial eléctrico

Es la energía potencial eléctrica por unidad de carga.

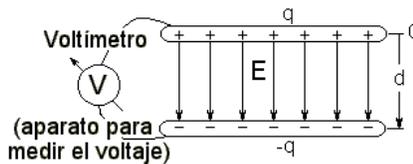
$$V = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r} \quad [V] = \text{volt}$$

Diferencia de potencial

Puede interpretarse como el trabajo que debe entregarse a una carga unitaria para moverla desde el punto 1 hasta el punto 2. Por lo tanto, indica qué posibilidad tiene una carga de ir desde un punto a otro, ya que es la energía potencial que tiene en un punto referido a la que tiene en el otro. Para un campo eléctrico constante se tiene:

$$V = V_2 - V_1 \quad \Delta V = E \cdot d; \quad [V]$$

Diferencia de potencial entre dos placas planas paralelas:



$$\Delta V = E \cdot d = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{d \cdot Q}{A}$$

Corriente

$$i = I_m \text{sen}(\omega t) = I_m \text{sen}(\alpha)$$

Voltaje

$$v = Ri$$

Resistencia

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

R = resistencia (Ω)

ρ = resistividad del conductor $\left(\frac{\Omega \cdot m^2}{m} \right)$

L = longitud (m)

A = área (m^2)

Variación de la resistencia con la temperatura

$$R_2 = R[1 + \alpha(t_2 - t_1)]$$

Por relaciones de resistencia

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{T + t_2}{T + t_1}$$

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

α = coeficiente de corrección por temperatura

Inductancia

$$e = \frac{d\tau}{dt} \quad v \quad e = L \frac{di}{dt}$$

e = voltaje inducido en voltios

$\frac{d\tau}{dt}$ = velocidad del flujo (wb/seg)

$\frac{di}{dt}$ = velocidad de la corriente (Amp/seg)

L = inductancia (henry)

Enlace de flujo, voltaje inducido

$$\Psi = LI = N\phi$$

Ψ = enlaces de flujo (wb)

L = inductancia (henry)

I = corriente (amperes)

ϕ = *flujo magnético* (webers)

N = número de vueltas del devanado

$$V = j\omega\Psi \quad M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

V = voltios

ω = velocidad angular (rad/seg)

M_{12} = inductancia mutua (H)

Inductancia entre dos puntos externos de un conductor

$$L_{12} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_2}{D_1} \dots\dots (H/m)$$

D = distancia (m)

Inductancia de una línea monofásica

$$L_1 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'_1} \dots\dots\dots (H/m)$$

$$L_2 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'_2} \dots\dots\dots (H/m)$$

$$L = L_1 + L_2$$

$$L = 4 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'} \dots\dots\dots (H/m)$$

L = inductancia (henry)

D = distancia (m)

$$r' = r e^{\frac{1}{4}}$$

r = radio conductor (m)

Inductancia de una línea monofásica con conductores compuestos

$$L_x = 2 \times 10^{-7} \times \ln \frac{\sqrt{(D_{aa'} D_{ab'} D_{ac'} \dots D_{am}) (D_{ba'} D_{bb'} D_{bc'} \dots D_{bm}) \dots (D_{na'} D_{nb'} D_{nc'} \dots D_{nm})}}{n^2 \sqrt{(D_{aa} D_{ab} D_{ac} \dots D_{an}) (D_{ba} D_{bb} D_{bc} \dots D_{bn}) \dots (D_{na} D_{nb} D_{nc} \dots D_{nn})}}$$

$$L_y = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_m}{D_s} \dots\dots\dots (H/m)$$

$$L = L_x + L_y$$

L = inductancia (henry)

L_x = inductancia lado x (henry)

L_y = inductancia lado y (henry)

D_{aa}, D_{ab}, D_{ac} distancia mutua (m)

$D_{aa} = r'_a = r_a e^{-1/4}$ distancia propia (m)

$D_{bb} = r'_b = r_b e^{-1/4}$

$D_{cc} = r'_c = r_c e^{-1/4}$

D_m = distancia media geométrica entre conductores (m)

D_s = distancia media geométrica propia (radio medio geométrico)

Reactancia inductiva en líneas monofásicas

$$X_L = 2\pi fL$$

$$X_L = 4\pi f \times 10^{-7} \ln \frac{D_m}{D_s} \dots\dots\dots (\Omega)$$

$$X_L = X_a + X_d \dots\dots\dots (\Omega)$$

X_a = reactancia inductiva (Ω)

X_d = factor de espaciamento (Ω)

Motor de corriente continua

$$V_t = V_c + (I_a * R_a)$$

En donde:

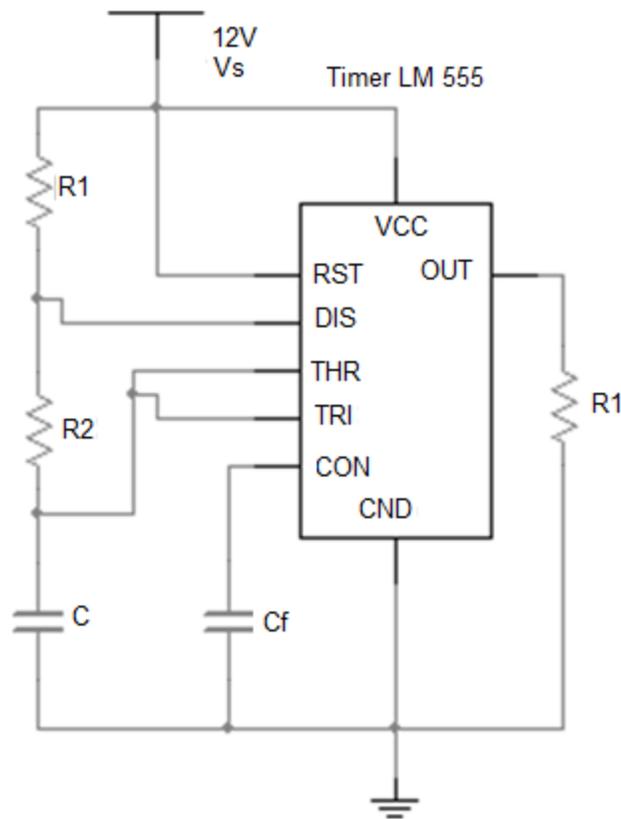
V_t = Voltaje en las terminales de la armadura

V_c = Fuerza contra electromotriz

I_a = Corriente en la armadura

R_a = Resistencia de la armadura

Circuito oscilador LM555



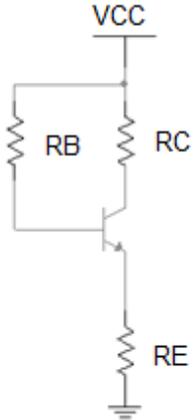
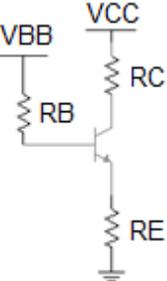
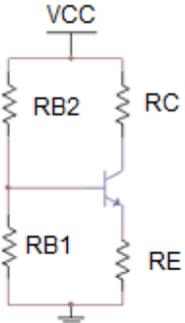
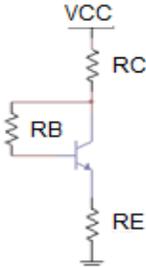
$$f_{Hz} = \frac{1}{0.693(R_1 + 2R_2)C}$$

$$t_{ON} = 0.693(R_1 + 2R_2)C$$

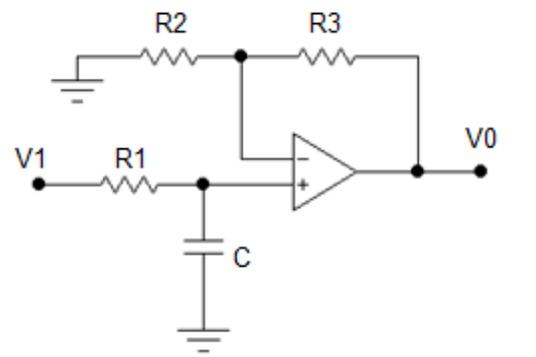
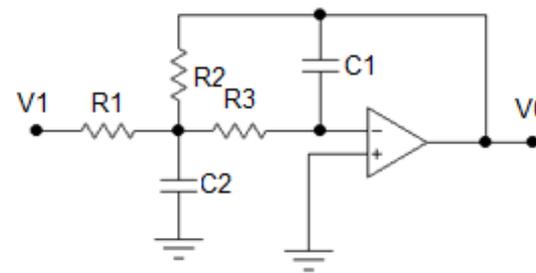
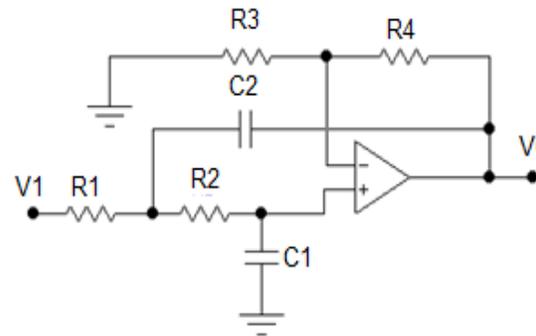
$$t_{OFF} = 0.693R_2C$$

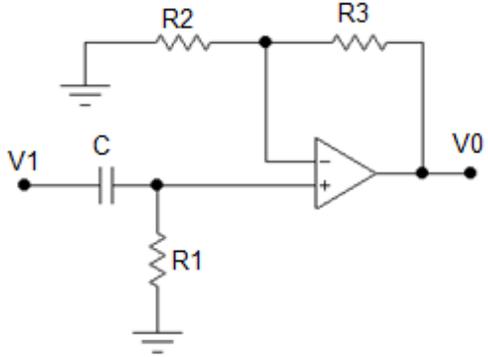
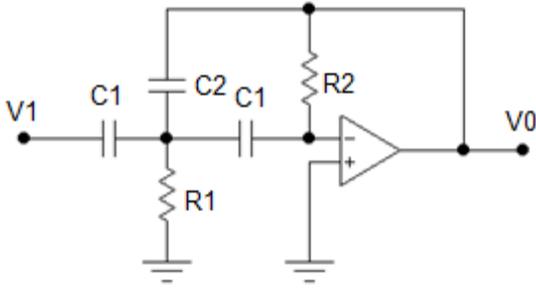
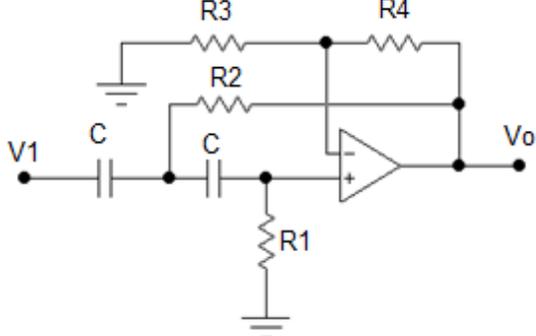
El transistor

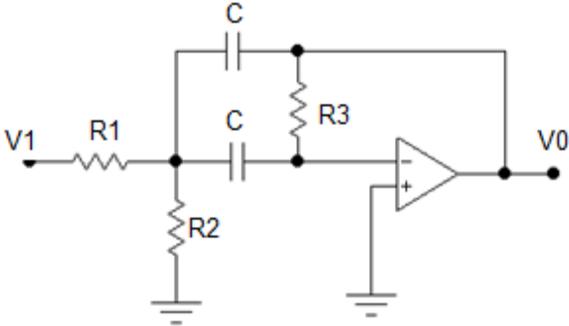
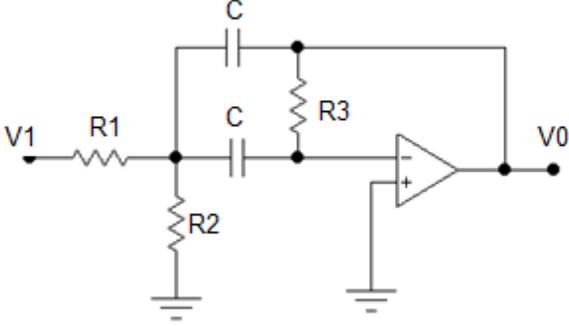
Circuitos de polarización de transistores bipolares

<p style="text-align: center;">Polarización de corriente de base</p> 	$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B + (1 + h_{FE})R_E}$ $I_C = h_{FE}I_B$ $V_{CE} = V_{CC} - I_C \left(R_C + \frac{1 + h_{FE}}{h_{FE}} R_E \right)$ <p>Si $I_B \ll I_C$ ($h_{FE} \gg 1$)</p> $I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B + h_{FE}R_E}$ $V_{CE} = V_{CC} - I_C(R_C + R_E)$
<p style="text-align: center;">Polarización de tensión de base constante</p> 	$I_B = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B + (1 + h_{FE})R_E}$ $I_C = h_{FE}I_B$ $V_{CE} = V_{CC} - I_C \left(R_C + \frac{1 + h_{FE}}{h_{FE}} R_E \right)$
<p style="text-align: center;">Autopolarización</p> 	<p>Idénticas fórmulas al caso anterior, siendo</p> $R_B = R_{B1} R_{B2} = \frac{R_{B1}R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}}$ $V_{BB} = \frac{R_{B1}}{R_{B1} + R_{B2}} V_{CC}$
<p style="text-align: center;">Polarización de colector base</p> 	$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B + (1 + h_{FE})(R_C + R_E)}$ $I_C = h_{FE}I_B$ $V_{CE} = I_B R_B V_{BE}$ <p>El transistor nunca entra en saturación</p>

Filtros activos

<p>Filtro pasa bajas de primer orden</p> 	$K = 1 + \frac{R_3}{R_2}$ $R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ $R_2 = \frac{K}{K - 1} R_1$ $R_3 = K R_1$
<p>Filtro pasa bajas de segundo orden (MFB)</p> 	$K = \frac{R_2}{R_1}$ $R_1 = \frac{R_2}{K}$ $R_2 = \frac{2(K + 1)}{\left[a C_2 + (a^2 C_2^2 - 4b C_1 C_2 (K + 1))^{\frac{1}{2}} \right] \omega_c}$ $R_3 = \frac{1}{b C_1 C_2 \omega_c^2 R_2}$
<p>Filtro pasa bajas de segundo orden</p> 	$K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$ $R_1 = \frac{1}{\left[a C_2 + ([a^2 + 4b(K + 1)] C_2^2 - 4b C_1 C_2)^{\frac{1}{2}} \right] \omega_c}$ $R_2 = \frac{1}{b C_1 C_2 R_1 \omega_c^2}$ $R_3 = \frac{K(R_1 + R_2)}{K - 1}; K > 1$ $R_4 = K(R_1 + R_2)$

<p>Filtro pasa altas de primer orden</p> 	$K = 1 + \frac{R_3}{R_2}$ $R_1 = \frac{1}{\omega_c C}$ $R_2 = \frac{K}{K - 1} R_1; K > 1$ $R_3 = KR_1$ $R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$
<p>Filtro pasa altas de segundo orden (MFB)</p> 	$K = \frac{C_1}{C_2}$ $R_1 = \frac{1}{(2C_1 + C_2)\omega_0}$ $R_2 = \frac{(2C_1 + C_2)b}{aC_1C_2\omega_0}$ $C_1 = \frac{10}{f_c}$
<p>Filtro pasa altas de segundo orden (VCVS)</p> 	$K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$ $R_1 = \frac{4b}{\left[a + (a^2 + 8b(K + 1))^{\frac{1}{2}} \right] \omega_c C}$ $R_2 = \frac{b}{C^2 R_1 \omega_c^2}$ $R_3 = \frac{KR_1}{K - 1}; K > 1$ $R_4 = KR_1$ $C_1 = \frac{10}{f_c}$

<p>Filtros pasa banda (MFB)</p> 	$K < 2Q_0^2$ $R_1 = \frac{Q_0}{\omega_0 CK}$ $R_2 = \frac{Q_0}{\omega_0 C(2Q_0^2 - K)}$ $R_3 = \frac{2Q_0}{\omega_0 C}$ $K = \frac{R_3}{2R_1}$ $Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_{cs} - \omega_{ci}} = \frac{f_0}{f_{cs} - f_{ci}} = \frac{f_0}{B\omega}$ $f_0 = (f_{ci}f_{cs})^{\frac{1}{2}}$
<p>Filtros rechazo de banda</p> 	$R_1 = \frac{1}{2Q_0\omega_0 C}$ $R_2 = \frac{2Q_0}{\omega_0 C}$ $R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Automatización de sistemas

Tabla de transformadas de Laplace

Impulso unitario $\delta(t)$	1
Impulso $A\delta(t)$	A
Escalón unitario $u(t)$ donde $u(t) = 1$	$\frac{1}{s}$
Escalón $Au(t)$ donde $u(t) = 1$	$\frac{A}{s}$
Rampa unitaria At	$\frac{A}{s^2}$
At^n	$\frac{An!}{s^{n+1}}$
$Ae^{-\alpha t}$	$\frac{A}{s + \alpha}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$
Asen ωt	$\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$
Acos ωt	$\frac{As}{s^2 + \omega^2}$

Teoremas de las transformadas de Laplace

$\mathcal{L} [f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$		
$\mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$ <p style="text-align: center;">Donde</p> $f^{n-1}(0) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t), \quad a \quad t=0$		
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">$\mathcal{L} \left[\int f(t) \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$</td> <td style="border: none; padding: 5px;">$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) \right] = \frac{F(s)}{s}$</td> </tr> </table>	$\mathcal{L} \left[\int f(t) \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$	$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) \right] = \frac{F(s)}{s}$
$\mathcal{L} \left[\int f(t) \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$	$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) \right] = \frac{F(s)}{s}$	
$\mathcal{L} [e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha)$		
$\mathcal{L} [f(t - \alpha)u(t - \alpha)] = e^{-\alpha s} F(s)$		
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$		
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$		
$\mathcal{L} \{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$		

Expansión en fracciones parciales

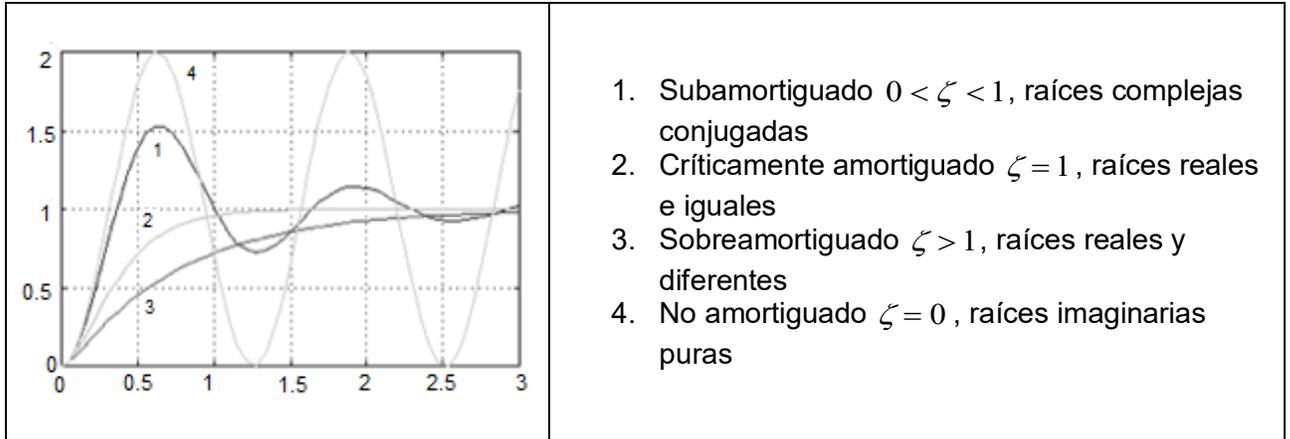
CASO 1	$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$ $F(s) = \frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + \dots + \frac{a_n}{(s+p_n)}$ $a_k = \left[(s+p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$	<p style="text-align: right;">$-z_1, -z_2, \dots, -z_m \rightarrow$ ceros</p> <p>donde: $-p_1, -p_2, \dots, -p_n \rightarrow$ polos</p> <p style="text-align: center;">$m < n$</p> <p>donde: a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) constantes</p>
CASO 2	$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$ $F(s) = \underbrace{\frac{a_1}{(s+p_1)} + \frac{a_2}{(s+p_2)} + \dots + \frac{a_n}{(s+p_{n-r})}}_{\text{polos diferentes}} + \underbrace{\frac{b_1}{(s+p_i)} + \frac{b_2}{(s+p_i)^2} + \dots + \frac{b_r}{(s+p_i)^r}}_{\text{polos repetidos}}$ $b_r = \left[(s+p_i)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_i}$ $b_{r-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+p_i)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_i} \quad \dots$	<p style="text-align: right;">$-z_1, -z_2, \dots, -z_m \rightarrow$ ceros</p> <p>donde: $-p_1, -p_2, \dots, -p_n \rightarrow$ polos</p> <p style="text-align: center;">$m < n$</p> $b_{r-1} = \frac{d}{ds} \left[(s+p_i)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_i}$ $b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[(s+p_i)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_i}$
CASO 3	$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p)(s+\alpha+\beta j)(s+\alpha-\beta j)}$ <p>donde:</p> <p>$-z_1, -z_2, \dots, -z_m \rightarrow$ ceros</p> <p>$-\alpha \pm \beta j \rightarrow$ polos complejos</p> <p>$p \rightarrow$ polo real</p> $F(s) = \frac{a}{s+p} + \frac{bs+c}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} \quad R_p(s) = \left((s+\alpha)^2 + \beta^2 \right) \frac{B(s)}{A(s)} \Big _{s=-\alpha+\beta j} = S_p + T_p j$ $f(t) = ae^{-pt} + \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} [T_p \text{Cos}\beta t + S_p \text{Sen}\beta t]$	
CASO 4	$e^{-t_0 s} \cong \frac{1 - \frac{1}{2} t_0 s}{1 + \frac{1}{2} t_0 s}$	

Tipos de respuesta

Respuesta al escalón de sistemas de primer orden

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0$$

Respuesta al escalón de sistemas de segundo orden



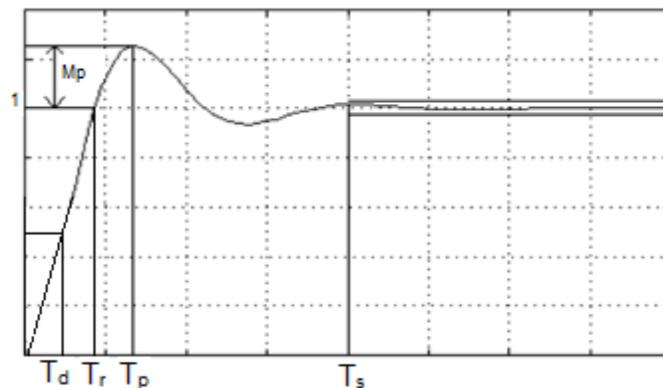
Si $\zeta = 0 \rightarrow y(t) = 1 - \cos(\omega_d t)$

Si $0 < \zeta < 1 \rightarrow y(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}(\omega_d t) \right)$

Si $\zeta = 1 \rightarrow y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$

Si $\zeta > 1 \rightarrow y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right)$

Especificaciones de la respuesta transitoria



Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Tiempo de crecimiento o tiempo de elevación (T_r)

$$T_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}; \beta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{\zeta \omega_n} \right) \quad \text{donde} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Tiempo de pico (T_p)

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Máximo sobreimpulso o máximo sobretiro (M_p)

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \pi}$$

Tiempo de establecimiento o tiempo de asentamiento (T_s)

Para un criterio de 2%, $T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$

Para un criterio de 5%, $T_s = \frac{3}{\zeta \omega_n}$

Regla de Mason

La función de transferencia entre una entrada $U(s)$ y una salida $Y(s)$ está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_i G_i \Delta_i$$

y donde:

G_i = ganancia de la trayectoria directa i -ésima entre $y_{entrada}$ y y_{salida}

Δ = determinante del sistema = $1 - \sum$ (ganancia de todos los lazos individuales) + \sum (productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos que no se tocan) - \sum (productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de tres lazos que no se tocan) +...

Δ_i = el valor de Δ para aquella parte del diagrama de bloques que no toca la k -ésima trayectoria directa

Controladores PID

Estructura ideal

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_D s \right)$$

donde:

$E(s) = R(s) - Y(s)$

$R(s)$ es la transformada de Laplace de la referencia

$Y(s)$ es la transformada de Laplace de la variable de proceso controlada

$U(s)$ es la transformada de Laplace de la variable de manipulación

Fórmulas para sintonización por el método de ganancia última de Ziegler-Nichols

Tipo de Controlador		Ganancia Proporcional	Tiempo Integral	Tiempo Derivativo
		K_c	τ_i	τ_d
Proporcional	P	$K_u/2$	---	---
Proporcional – Integral	PI	$K_u/2.2$	$T_u/1.2$	---
Proporcional – Integral-Derivativo	PID	$K_u/1.7$	$T_u/2$	$T_u/8$

Sintonización por criterios integrales para cambios en perturbación para un PID ideal

PROPORCIONAL – INTEGRAL		
ISE	IAE	ITAE
$K_c = \frac{1.305}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.959}$	$K_c = \frac{0.984}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.986}$	$K_c = \frac{0.859}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.977}$
$\tau_i = \frac{\tau}{0.492} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{0.739}$	$\tau_i = \frac{\tau}{0.608} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{0.707}$	$\tau_i = \frac{\tau}{0.674} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{0.680}$
PROPORCIONAL – INTEGRAL – DERIVATIVO		
ISE	IAE	ITAE
$K_c = \frac{1.495}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.945}$	$K_c = \frac{1.435}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.921}$	$K_c = \frac{1.357}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.947}$
$\tau_i = \frac{\tau}{1.101} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{0.771}$	$\tau_i = \frac{\tau}{0.878} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{0.749}$	$\tau_i = \frac{\tau}{0.842} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{0.738}$
$\tau_d = 0.560 * \tau \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{1.006}$	$\tau_d = 0.482 * \tau \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{1.137}$	$\tau_d = 0.381 * \tau \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{0.995}$

donde: K= ganancia del proceso de primer orden, τ = constante de tiempo,
 t_0 = tiempo muerto

PROPORCIONAL – INTEGRAL	
IAE	ITAE
$K_C = \frac{0.758}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.861}$	$K_C = \frac{0.586}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.916}$
$\tau_i = \frac{\tau}{1.02 - 0.323 * \left(\frac{t_0}{\tau} \right)}$	$\tau_i = \frac{\tau}{1.03 - 0.165 * \left(\frac{t_0}{\tau} \right)}$
PROPORCIONAL – INTEGRAL – DERIVATIVO	
IAE	ITAE
$K_C = \frac{1.086}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.869}$	$K_C = \frac{0.965}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{-0.855}$
$\tau_i = \frac{\tau}{0.74 - 0.130 * \left(\frac{t_0}{\tau} \right)}$	$\tau_i = \frac{\tau}{0.796 - 0.147 * \left(\frac{t_0}{\tau} \right)}$
$\tau_d = 0.348 * \tau \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{0.914}$	$\tau_d = 0.308 * \tau \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{0.9292}$

Sintonización por criterios integrales para cambios en referencia para un PID ideal

Aportación de magnitud y fase para cada término de la función de transferencia

Término	Magnitud logarítmica Fórmula	Ángulo de fase Fórmula	Magnitud logarítmica	Ángulo de fase
K	$20 \log K$	$\phi = 0^\circ$	$20 \log K$	$\phi = 0^\circ$
$j\omega$	$20 \log \omega$	$\phi = 90^\circ$	Línea diagonal con pendiente 20 dB/dec que cruza el punto ($\omega=1, db=0$)	$\phi = 90^\circ$
$\frac{1}{j\omega}$	$-20 \log \omega$	$\phi = -90^\circ$	Línea diagonal con pendiente -20 dB/dec que cruza el punto ($\omega=1, db=0$)	$\phi = -90^\circ$
$\tau j\omega + 1$	$20 \log \omega \tau$	$\phi = \text{Tan}^{-1} \omega \tau$	0 db, hasta la frec. de corte. ($\omega = 1/\tau$) pendiente 20 dB/dec a partir de $\omega > 1/\tau$	ϕ de 0° a 90° en ($\omega = 1/\tau$) = 45°
$\frac{1}{\tau j\omega + 1}$	$-20 \log \omega \tau$	$\phi = -\text{Tan}^{-1} \omega \tau$	0 db, hasta la frec. de corte. ($\omega = 1/\tau$) pendiente - 20 dB/dec a partir de $\omega > 1/\tau$	ϕ de 0° a 90° en ($\omega = 1/\tau$) = -45°
$\frac{(j\omega)^2}{(\omega_n)^2} + \frac{j\omega}{\omega_n} + 1$	$40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$	$\phi = \text{Tan}^{-1} \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right)$	Línea horizontal 0 db hasta $\omega = \omega_n$ pendiente 40 dB/dec para $\omega > \omega_n$	ϕ de 0° a 180° en ($\omega = \omega_n$) = 90°
$\frac{1}{\frac{(j\omega)^2}{(\omega_n)^2} + \frac{j\omega}{\omega_n} + 1}$	$-40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$	$\phi = -\text{Tan}^{-1} \left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right)$	Línea horizontal 0 db hasta $\omega = \omega_n$ pendiente - 40 dB/dec para $\omega > \omega_n$	ϕ de 0° a -180° en ($\omega = \omega_n$) = -90°
$e^{-j\omega t_o}$	0	$\phi = -57.3 \omega t_o$	0	$\phi = -57.3 \omega t_o$

Tabla de propiedades de la transformada z

	$x(t)$ o $x(k)$	$Z[x(t)]$ o $Z[x(k)]$
1.	$ax(t)$	$aX(z)$
2.	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
3.	$x(t+T)$ o $x(k+1)$	$zX(z) - zx(0)$
4.	$x(t+2T)$	$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(T)$
5.	$x(k+2)$	$z^2 X(z) - z^2 x(0) - zx(1)$
6.	$x(t+kT)$	$z^k X(z) - z^k x(0) - z^{k-1} x(T) - \dots - zx(kT - T)$
7.	$x(t-kT)$	$z^{-k} X(z)$
8.	$x(n+k)$	$z^k X(z) - z^k x(0) - z^{k-1} x(1) - \dots - zx(k-1)$
9.	$x(n-k)$	$z^{-k} X(z)$
10.	$tx(t)$	$-Tz \frac{d}{dz} X(z)$
11.	$kx(k)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$
12.	$e^{-at} x(t)$	$X(ze^{aT})$
13.	$e^{-ak} x(k)$	$X(ze^a)$
14.	$a^k x(k)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
15.	$ka^k x(k)$	$-z \frac{d}{dz} X\left(\frac{z}{a}\right)$
16.	$x(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$, si el límite existe
17.	$x(\infty)$	$\lim_{z \rightarrow 1} [(1-z^{-1})X(z)]$, si $(1-z^{-1})X(z)$ es analítica sobre y fuera del círculo unitario.
18.	$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$	$(1-z^{-1})X(z)$
19.	$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$	$(z-1)X(z) - zx(0)$
20.	$\sum_{k=0}^n x(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$
21.	$\frac{\partial}{\partial a} x(t, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} X(z, a)$
22.	$k^m x(k)$	$\left(-z \frac{d}{dz}\right)^m X(z)$
23.	$\sum_{k=0}^n x(kT)y(nT-kT)$	$X(z)Y(z)$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

24.	$\sum_{k=0}^{\infty} x(k)$	$X(z)$
-----	----------------------------	--------

Tabla de transformada –Z y transformada –Z modificada

Función en el dominio del tiempo, f(t)	Transformada de Laplace, F(s)	Transformada Z, F(z)	Transformada Z modificada, F(z,m)
u(t) (escalón unitario)	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{mTz^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{Tz^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$
t^2	$\frac{2!}{s^3}$	$\frac{T^2Z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$T^2 \left[\frac{m^2z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{(2m+1)z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{2z^{-3}}{(1-z^{-1})^3} \right]$
t^{n-1}	$\frac{(n-1)!}{s^n}$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left(\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \right)$	$\lim_{a \rightarrow 0} (-1)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \left(\frac{e^{-amT}z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}} \right)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$	$\frac{e^{-amT}z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}} \right)$	$\frac{z^{-1}}{b-a} \left(\frac{e^{-amT}}{1-e^{-aT}z^{-1}} - \frac{e^{-bmT}}{1-e^{-bT}z^{-1}} \right)$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{\frac{1}{a}(1 - e^{-at})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1 - e^{-aT}z^{-1})}$	$\frac{z^{-1}}{a} \left(\frac{1}{(1-z^{-1})} - \frac{e^{-amT}}{1 - e^{-aT}z^{-1}} \right)$
$\frac{1}{a} \left(t - \frac{1 - e^{-aT}}{a} \right)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a} \left[\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{a(1-z^{-1})(1 - e^{-aT}z^{-1})} \right]$	$\frac{z^{-1}}{a} \left[\frac{T}{(1-z^{-1})^2} + \frac{amT-1}{a(1-z^{-1})} + \frac{e^{-amT}}{a(1 - e^{-aT}z^{-1})} \right]$
$\frac{(a-b)}{a^2} + \frac{b}{a}t + \frac{1}{a} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) e^{-at}$	$\frac{s+b}{s^2(s+a)}$	$\frac{z}{a} \left[\frac{bT}{(1-z^{-1})^2} + \frac{(a-b)(1 - e^{-aT})}{a(1-z^{-1})(1 - e^{-aT}z^{-1})} \right]$	$\frac{z^{-1}}{a} \left[\frac{bTz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \left(bmT + 1 - \frac{b}{a} \right) \frac{1}{1-z^{-1}} + \left(\frac{b-a}{a} \right) \frac{e^{-amT}}{1 - e^{-aT}z^{-1}} \right]$

Procesos de máquinas-herramientas

Torneado

$$t_c = \left(\frac{L}{a_p} \right) \cdot \frac{\pi \cdot d}{v_c}; \quad n = \frac{v_c}{\pi \cdot d}; \quad v_c = f \cdot n; \quad MRR = v_c \cdot f \cdot a_p; \quad \theta = \frac{\tan^{-1}(D-d)}{2 \cdot L}$$

a_p = profundidad de corte (m)

t_c = tiempo de corte (min)

MRR = tasa de remoción de material (m³/min)

n = velocidad de avance (rpm)

f = alimentación del material (m/rev)

L = longitud a tornearse (m)

d = diámetro de acabado (m)

v_c = velocidad de corte (m/min)

θ = ángulo de giro

D = diámetro mayor (m)

Fresado

$$MRR = a_e \cdot a_p \cdot v_f; \quad \theta = \frac{\tan^{-1}(D-d)}{2 \cdot L}; \quad n = \left(\frac{v_f}{\pi \cdot D_c} \right); \quad v_f = n \cdot z_c \cdot f_z$$

a_p = ancho de corte axial (m)

a_e = ancho de corte radial (m)

v_f = velocidad de avance (m/min)

D_c = diámetro de la herramienta (m)

n = velocidad del husillo (rpm)

z_c = número efectivo de dientes

f_z = avance (m/diente)

Taladrado

$$t_c = \frac{\pi \cdot d \cdot L}{f \cdot v_c \cdot 1000}; \quad L = t + m; \quad m = 0.3 \cdot d$$

t_c = tiempo de corte (min)

d = diámetro de la broca (mm)

L = recorrido total de la broca (mm)

v_c = velocidad de corte (m/min)

f = avance por revolución de la broca (mm/rev)

t = espesor de la pieza o profundidad de orificio (mm)

m = espacio muerto (mm)

Equivalencia de elementos de sistemas dinámicos

Tipo de sistema	Mecánico traslacional	Mecánico rotacional	Eléctrico	Flujo	Térmico
Variable tipo A	Velocidad, v	Velocidad, Ω	Voltaje, e	Presión, P	Temperatura, T
Elemento tipo A	Masa, m	Momento de inercia, J	Capacitor, C	Flujo del capacitor, C_f	Capacitor térmico, C_h
Ecuaciones elementales	$F = m \frac{dv}{dt}$	$T = J \frac{d\Omega}{dt}$	$i = C \frac{de}{dt}$	$Q_f = C_f \frac{dP}{dt}$	$Q_h = C_h \frac{dT}{dt}$
Energía almacenada	Cinética	Cinética	Campo eléctrico	Potencial	Térmica
Ecuaciones de energía	$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$	$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\Omega^2$	$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}Ce^2$	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}C_fP^2$	$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2}C_hT^2$
Variable tipo T	Fuerza, F	Torque, T	Corriente, i	Tasa de flujo, Q_f	Flujo de calor, Q_h
Elemento tipo T	Esfuerzo, $1/k$	Esfuerzo, $1/k$	Inductor, L	Tensor de inercia, I	Ninguno
Ecuaciones elementales	$v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$\Omega = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt}$	$e = L \frac{di}{dt}$	$P = I \frac{dQ_f}{dt}$	Ninguno
Energía almacenada	Potencial	Potencial	Campo magnético	Cinética	Ninguna
Ecuaciones de energía	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2k}F^2$	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2k}T^2$	$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$	$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}IQ_f^2$	Ninguna
Elemento tipo D	Amortiguador, b	Amortiguador rotacional, B	Resistor, R	Resistencia al flujo, R_f	Resistor térmico, R_h
Ecuaciones elementales	$F = bv$	$T = B\Omega$	$i = \frac{1}{R}e$	$Q_f = \frac{1}{R_f}P$	$Q_h = \frac{1}{R_h}T$
Energía disipada	$\frac{dE_D}{dt} = Fv$ $= \frac{1}{b}F^2$ $= bv^2$	$\frac{dE_D}{dt} = T\Omega$ $= \frac{1}{B}T^2$ $= B\Omega^2$	$\frac{dE_D}{dt} = ie$ $= Ri^2$ $= \frac{1}{R}e^2$	$\frac{dE_D}{dt} = Q_fP$ $= R_fQ_f^2$ $= \frac{1}{R_f}P^2$	$\frac{dE_D}{dt} = Q_h$

Criterio de estabilidad de Routh

Sea la función de transferencia de un sistema lineal en lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad m \geq n$$

Ordenamiento de coeficientes a través de:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	...
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	...
\vdots					
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

donde

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}$$

$$\vdots$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$$

$$\vdots$$

$$d_1 = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1}$$

Resolución de un convertidor digital a analógico (DAC)

Para un DAC el número total de escalones discretos es $2^n - 1$, donde n es el número de bits. Así, para un DAC de 8 bits, la resolución es:

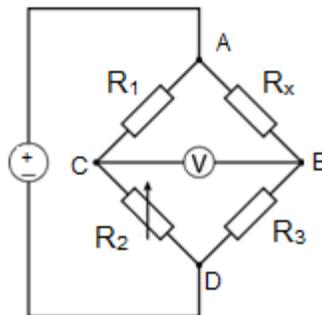
$$\left[\frac{1}{2^8 - 1} \right] 100 = 0.3922\%$$

Configuraciones básicas de amplificadores operacionales

Configuración	Diagrama	Relación entrada-salida
Seguidor		$V_{out} = V_{in}$
Inversor		$V_{out} = -V_{in} \frac{R_f}{R_{in}}$
o inversor		$V_{out} = V_{in} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$
Sumador inversor		$V_{out} = -R_f \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_n}{R_n}\right)$
estador		$V_{out} = V_2 \left(\frac{(R_3 + R_1)R_4}{(R_4 + R_2)R_1}\right) - V_1 \left(\frac{R_3}{R_1}\right)$

Integrador		$V_{out} = \int_0^t -\frac{V_{in}}{RC} dt + V_{inicial}$
Derivador		$V_{out} = -RC \frac{dV_{in}}{dt}$

Puente de Wheatstone



En condición de equilibrio, se cumple que: $R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$

Coefficiente alfa de Cronbach

$$\alpha = \frac{K}{K-1} \left[1 - \frac{\sum S_i^2}{S_T^2} \right]$$

donde:

K: El número de mediciones

S_i^2 : Sumatoria de varianzas de las mediciones

S_T^2 : Varianza de la suma de las mediciones

α : Coeficiente de alfa de Cronbach

Formulario para el sustentante del

Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)

Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Cambios de base numérica

Número decimal	Representación binaria	Representación octal	Representación hexadecimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A (valor decimal 10)
11	1011	13	B (valor decimal 11)
12	1100	14	C (valor decimal 12)
13	1101	15	D (valor decimal 13)
14	1110	16	E (valor decimal 14)
15	1111	17	F (valor decimal 15)
16	10000	20	10

Desarrollo y coordinación de proyectos mecatrónicos

Calidad

<p style="text-align: center;">Tiempo de ciclo</p> $T_c = \frac{T_D}{U_p}$ <p style="text-align: center;">TD = tiempo disponible Up = unidades por procesar</p>	<p style="text-align: center;">Porcentaje de utilización</p> $\%U = \frac{P_R}{C_D}$ <p style="text-align: center;">PR = producción real CD = capacidad diseñada</p> <p style="text-align: center;">Índice de utilización de la máquina</p> $\frac{\text{tiempo de marcha}}{\text{tiempo utilizable}}$
<p style="text-align: center;">Eficiencia en el trabajo</p> $\varepsilon = \frac{P_R}{C_e}$ <p style="text-align: center;">PR = producción real Ce = capacidad efectiva</p>	<p style="text-align: center;">Tamaño de lote económico</p> $EOQ = \sqrt{\frac{2AS}{I}}$ <p style="text-align: center;">A = demanda anual S = costo promedio de hacer un pedido de material I = costo de almacenar una unidad en el inventario</p>
<p style="text-align: center;">Tiempo promedio de actividades</p> $Tp = \frac{(T_{Total})(\%Trabajo)(\%actuación)}{Núm.de piezas producidas} + suplementos$	
<p>Núm. de ciclos por observar</p> $S_p = 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$ <p>Sp = Precisión relativa deseada P = % de presencia de la actividad N = número de observaciones o muestras</p>	<p style="text-align: center;">Teoría de colas</p> <p style="text-align: center;">Tiempo de espera cero</p> $P_0 = 1 - \rho$ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ <p>λ = tasa de llegada μ = tasa de servicio ρ = tasa de utilización</p>

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

	Tiempo de espera "X" $Lq = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
Correlación $r_{12} = \frac{\sum(X_1 - \bar{X}_1)(X_2 - \bar{X}_2)}{n\sigma_1\sigma_2}$ $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum(X_1 - \bar{X}_1)^2}{n}}$	Error estándar de la producción $\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ <p>p = Porcentaje de tiempo inactivo q = Porcentaje de tiempo en marcha n = Número de observaciones o tamaño de la muestra</p>
Pronóstico (suavización exponencial) $F_t = \alpha A_t + (1-\alpha)F_{t-1}$	Tiempo básico de proceso $\text{tiempo observado} \left(\frac{\text{valor atribuido}}{\text{valor tipo}} \right)$
F_t =	Pronóstico para el periodo t
F_{t-1} =	Pronóstico para el periodo t-1
A_{t-1} =	Datos reales del periodo t-1
α =	Constante de suavización de 0 a 1

Redes (diagrama PERT)

$$d_{ij} = \frac{(a + 4m + b)}{6}$$

d_{ij} = duración de la actividad
 a = duración optimista
 m = duración más probable
 b = duración pesimista

Tiempo más temprano t_j

$$t_j = \max(t_i + d_{ij})$$

Tiempo más tardío T_j

$$T_j = \min(T_i + d_{ij})$$

j = suceso cuya fecha hay que calcular
 i = etapas origen de actividades que llegan a él

Toma de decisiones (árboles de decisión)

$$VE(d_i) = \sum_{j=1}^N (P(s_j) \cdot V_{ij})$$

VE = valor esperado de la alternativa de decisión
 d_i = alternativa de decisión

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

$P(s_j)$ = probabilidad del estado de la naturaleza s_j

V_{ij} = resultado correspondiente a la alternativa de decisión d_i y el estado de la naturaleza s_j

N = número de estados de la naturaleza

Balanceo de líneas de ensamble

$$\text{Tiempo de ciclo} = \frac{\text{Tiempo de producción por día}}{\text{Producción por día (en unidades)}}$$

$$\text{Número de estaciones} = \frac{\text{Suma de los tiempos de las tareas (T)}}{\text{Tiempo del ciclo}}$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{Suma de los tiempos de las tareas (T)}}{\text{Número real de estaciones de trabajo (Na) x Tiempo de ciclo de la estación de trabajo (C)}}$$

Balanceo de líneas con base en los operarios

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{Suma de los tiempos por operación}}{\text{Suma de los tiempos permitidos por operación}} \times 100 \text{ \% de inactividad} = 100 - E$$

$$\text{Número de operarios necesarios} = R \cdot \left(\frac{\sum ME}{E} \right)$$

R = tasa de producción deseada

ME = tiempo por operación

E = eficiencia

$$\text{Piezas por hora de una operación} = \frac{\text{Núm. de operarios de la operación} \times 60\text{min}}{\text{Tiempo de la operación}}$$

Secuenciación de tareas

Programación de N trabajos en una máquina

Tiempo total de flujo = Suma de los tiempos de flujo de cada actividad

$$\text{Tiempo medio de flujo} = \frac{\text{Tiempo total de flujo}}{\text{Número total de actividades}}$$

Inventarios

Costo anual total

$$TC = D \cdot C + \frac{D}{Q} S + \frac{Q}{2} H$$

TC = costo total anual

D = demanda (anual)

C = costo por unidad

Q = volumen de la orden (cantidad óptima)

S = costo por preparación o por colocar una orden

L = tiempo de entrega

H = costo anual de mantener y almacenar una unidad del inventario promedio

MODELO Q. Cantidad óptima de la orden en un periodo de cantidad fija

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot D \cdot S}{H}}$$

Q = cantidad óptima de pedido

D = demanda (anual)

S = costo por preparación o por colocar una orden

H = costo anual de mantener y almacenar una unidad del inventario promedio

MODELO Q. Punto de reorden

$$R = \bar{d} \cdot L$$

R = punto de reorden

\bar{d} = demanda diaria promedio

L = tiempo de entrega en días

MODELO Q. Punto de reorden considerando existencia de seguridad

$$R = \bar{d} \cdot L + z \cdot \sigma_L$$

R = punto de reorden

\bar{d} = demanda diaria promedio

L = tiempo de entrega en días

z = número de desviaciones estándar para una probabilidad específica de servicio

σ_L = desviación estándar de uso durante el tiempo de entrega

MODELO Q. Demanda diaria promedio

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

n = número de días

MODELO Q. Desviación estándar de la demanda a lo largo de un periodo de n días

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n}}$$

MODELO Q. Desviación estándar de una serie de demandas independientes

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_i^2}$$

MODELO Q. Desviación estándar durante el plazo

$$\sigma_L = \sqrt{\sum_{i=1}^L \sigma_{d_i}^2}$$

MODELO P. Cantidad óptima de la orden en un periodo fijo

$$q = \bar{d} \cdot (T + L) + z \cdot \sigma_{T+L} - I$$

q = punto de reorden

\bar{d} = demanda diaria promedio

T = cantidad de días entre revisiones

L = tiempo de entrega en días

z = número de desviaciones estándar para una probabilidad específica de servicio

σ_{T+L} = desviación estándar de la demanda entre revisiones y tiempo de entrega

I = nivel corriente del inventario

MODELO P. Desviación estándar de una serie de demandas independientes a lo largo del periodo entre revisiones T y el tiempo de entrega L.

$$\sigma_{T+L} = \sqrt{\sum_{i=1}^{T+L} \sigma_{d_i}^2}$$

Tiempo estándar

Tiempo normal

Tiempo normal = tiempo de desempeño observado por unidad × índice de desempeño

Tiempo normal durante un periodo

$$\text{Tiempo normal} = \frac{\text{tiempo trabajado}}{\text{núm. de unidades producidas}} \times \text{índice de desempeño}$$

Tiempo estándar

$$\text{Tiempo estándar} = \text{tiempo normal} + (\text{tolerancias} \times \text{tiempo normal})$$

Punto de equilibrio

$$\text{punto de equilibrio} = \frac{CF}{1 - \frac{CV}{P \times Q}}$$

CF = costos fijos totales

CV = costos variables totales

P = precio del producto

Q = cantidad de productos vendidos

Tasa de interés anual efectivo

$$i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

Encontrar un presente dado un futuro

$$P = F \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Encontrar un futuro dado un presente

$$F = P \cdot (1+i)^n$$

Encontrar un presente dada una anualidad

$$P = A \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

Encontrar una anualidad dado un presente

$$A = P \cdot \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Encontrar una anualidad dado un futuro

$$A = F \cdot \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Encontrar un futuro dada una anualidad

$$F = A \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Encontrar un presente dado un gradiente

$$P = \frac{G}{i} \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

Encontrar un futuro dado un gradiente

$$F = \frac{G}{i} \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

Encontrar una anualidad dado un gradiente

$$A = G \cdot \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Relación costo-beneficio

$$B/C = \frac{\text{ingreso} - \text{egresos}}{\text{costos}}$$

Depreciación

$$D_t = \frac{B - VS}{n}$$

t = año

D_t = cargo por depreciación anual

B = costo inicial o base no ajustada

VS = valor de salvamento

n = vida depreciable esperada o periodo de recuperación

Depreciación valor en libros

$$VL = B - t \cdot D_t$$

Rotación de inventarios

$$\text{Rotación de inventarios} = \frac{\text{Costo de ventas}}{\text{Inventario}}$$

Rotación de los activos totales

$$\text{Rotación de activos totales} = \frac{\text{Ventas}}{\text{Activos totales}}$$

Análisis de la deuda

Razón de deuda

$$\text{Razón de deuda} = \frac{\text{Pasivos totales}}{\text{Activos totales}}$$

Razón de la capacidad de pago de intereses

$$\text{Razón de la capacidad de pago de intereses} = \frac{\text{Utilidad antes de intereses e impuestos}}{\text{Intereses}}$$

Análisis de la rentabilidad

Margen de utilidad bruta

$$\text{Margen de utilidad bruta} = \frac{\text{Ventas} - \text{costo de ventas}}{\text{Ventas}} = \frac{\text{Utilidad bruta}}{\text{Ventas}}$$

Margen de utilidad operativa

$$\text{Margen de utilidad neta} = \frac{\text{Utilidad neta después de impuestos}}{\text{Ventas}}$$

Rendimiento sobre los activos

$$\text{Rendimiento sobre los activos} = \frac{\text{Utilidad neta después de impuestos}}{\text{Activos totales}}$$

Rendimiento sobre el capital contable

$$\text{Rendimiento sobre el capital contable} = \frac{\text{Utilidad neta después de impuestos}}{\text{Capital contable}}$$

Análisis de la liquidez

Capital de trabajo neto

$$\text{Capital de trabajo neto} = \text{activo circulante} - \text{pasivo circulante}$$

Razón circulante

$$\text{Razón circulante} = \frac{\text{Activo circulante}}{\text{Pasivo circulante}}$$

Razón rápida (prueba del ácido)

$$\text{Razón rápida} = \frac{\text{Activo circulante} - \text{inventario}}{\text{Pasivo circulante}}$$

Estadística para la administración de operaciones

Media aritmética

$$\bar{x} = x_r - \Delta \cdot \left(\frac{\sum ta}{n} - 1 \right)$$

x_r = última marca de clase
 Δ = amplitud de intervalo
 ta = frecuencia acumulada
 n = número de datos

Promedio

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

x_i = marca de clase
 n = número de datos

Mediana

$$M_d = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - c}{f} \right) \cdot i$$

L_i = límite inferior

n = número de datos

c = frecuencia acumulada anterior a la mediana

i = amplitud del intervalo

Moda

$$M_o = L_i \cdot \left(\frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} \right) \cdot i$$

L_i = límite inferior

$\Delta 1$ = frecuencia en la moda menos anterior

$\Delta 2$ = frecuencia en la moda menos la frecuencia posterior

i = amplitud del intervalo

Media de proporción

$$Q = L_i + \left(\frac{\frac{in}{4} - c}{f} \right) \cdot t$$

Q = cuartil (4)

D = decil (10)

L_i = límite inferior

in = número de datos

c = frecuencia acumulada exterior

f = frecuencia

t = amplitud de intervalo

Desviación estándar poblacional

$$S = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{X})^2}{n}}$$

Muestral

$$S = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{X})^2}{n-1}}$$

f = frecuencia

x = marca de clase

\bar{X} = media aritmética

n = número de datos

Varianza S^2

Poblacional

$$S^2 = \frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{n}$$

Muestral

$$S^2 = \frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{n-1}$$

Ingeniería económica

Valor actual neto

$$VAN = \sum_{t=1}^n \frac{V_t}{(1+k)^t} - I_0$$

donde:

V_t = flujos de caja de cada periodo t

I_0 = inversión inicial

n = número de periodos

k = tipo de interés

Amortización

Valor actual : $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

Valor futuro: $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Donde:

i = la tasa de interés

n = el número de periodos

Para el cálculo de la amortización de capital se usa la siguiente fórmula:

$$A = \frac{m \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

m = saldo al final del periodo

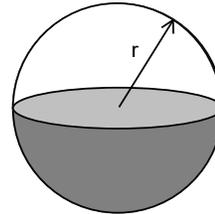
Ciencias básicas

Matemáticas

Geometría

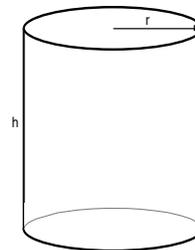
$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Área de la superficie} = 4 \pi r^2$$



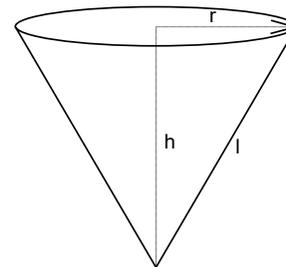
$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

$$\text{Área de la superficie lateral} = 2 \pi r h$$



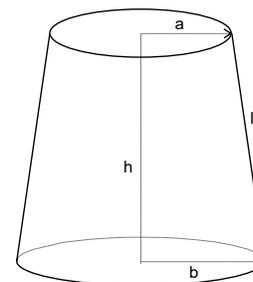
$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{Área de la superficie lateral} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r l$$



$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi h (a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie lateral} &= \pi (a+b) \sqrt{h^2 + (b-a)^2} \\ &= \pi (a+b) l \end{aligned}$$



Geometría analítica del espacio

Considerando $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Vector que une P_1 y P_2 :

$$\overline{P_1P_2} = \langle (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1) \rangle = (l, m, n)$$

Distancia entre dos puntos:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$$

Recta que pasa por dos puntos:

- Forma paramétrica:

$$x = x_1 + lt$$

$$y = y_1 + mt$$

$$z = z_1 + nt$$

-Forma simétrica:

$$t = \frac{x - x_1}{l}$$

$$t = \frac{y - y_1}{m}$$

$$t = \frac{z - z_1}{n}$$

Cosenos directores:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d} = \frac{l}{d}$$

$$\cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d} = \frac{m}{d}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d} = \frac{n}{d}$$

donde α, β, γ denotan los ángulos que forman la línea que une los puntos P_1 y P_2 con la parte positiva de los ejes x, y, z , respectivamente.

Ecuación del plano

- Que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene vector normal $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$:

$$a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) = 0$$

-Forma general:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \text{o} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$

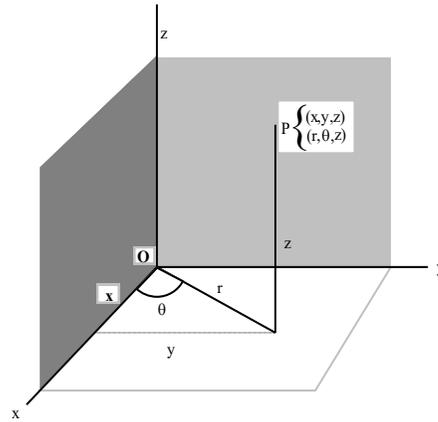
$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

En la cual el signo debe escogerse de tal manera que la distancia no resulte negativa.

Sistemas de coordenadas

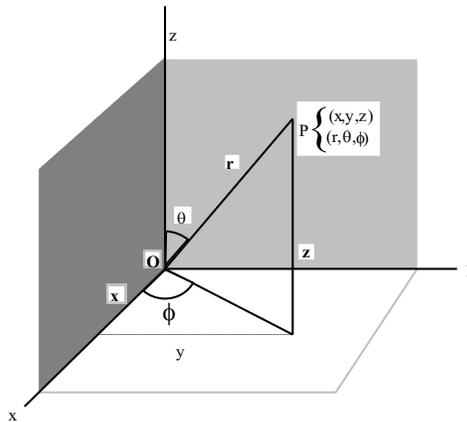
Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$



Coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$



Ángulo entre dos rectas en el plano $\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

Vectores

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

donde θ es el ángulo formado por \mathbf{A} y \mathbf{B}

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$\text{donde } \mathbf{A} = A_1 \hat{\mathbf{i}} + A_2 \hat{\mathbf{j}} + A_3 \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{B} = B_1 \hat{\mathbf{i}} + B_2 \hat{\mathbf{j}} + B_3 \hat{\mathbf{k}}$$

Son resultados fundamentales:

$$\text{Producto cruz: } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{\mathbf{i}} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{\mathbf{j}} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{Magnitud del producto cruz } \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \sin \theta$$

El operador *nabla* se define así:

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}$$

En las fórmulas que vienen a continuación vamos a suponer que $U=U(x,y,z)$, y $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,y,z)$ tienen derivadas parciales.

$$\text{Gradiente de } U = \text{grad } U = \nabla U = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{Divergencia de } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \nabla \bullet \mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet (A_1 \hat{\mathbf{i}} + A_2 \hat{\mathbf{j}} + A_3 \hat{\mathbf{k}})$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\text{Rotacional de } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_1 \hat{\mathbf{i}} + A_2 \hat{\mathbf{j}} + A_3 \hat{\mathbf{k}})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\text{Laplaciano de } U = \nabla^2 U = \nabla \bullet (\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy dx = \int_{x=a}^b \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy \right\} dx$$

La integral también se puede escribir así:

$$\int_{y=c}^d \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx dy = \int_{y=c}^d \left\{ \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx \right\} dy$$

Longitud de curva correspondiente al intervalo paramétrico $[a, t]$.

$$s = s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du$$

	En parámetro arbitrario:	En parámetro s:
Vector tangente unitario	$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\ \vec{r}'(t)\ }$	$\vec{t}(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(s)}{\ \dot{\vec{r}}(s)\ }$
Vector normal principal	$\vec{n}(t) = \nu(t) \times \vec{t}(t)$	$\vec{n}(s) = \frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{\ \ddot{\vec{r}}(s)\ }$
Vector binormal	$\vec{b}(t) = \frac{\vec{r}''(t)}{\ \vec{r}''(t)\ } \times \vec{r}'(t)$	$\vec{b}(s) = \frac{\ddot{\vec{r}}(s) \times \dot{\vec{r}}(s)}{\ \ddot{\vec{r}}(s) \times \dot{\vec{r}}(s)\ }$

Los vectores unitarios $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ forman un triedo positivo ($\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}, \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}, \vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$)

Recta tangente en t_0

Ecuación vectorial: Ecuación paramétrica

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0) \quad \frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}$$

Plano osculador (\vec{t}, \vec{n}) en t_0

Ecuación vectorial Ecuación paramétrica

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0)) \bullet (\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)) = 0 \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{vmatrix} = 0$$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Curvatura y torsión

$$\kappa = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad \kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \quad \tau(t) = \frac{\vec{r}'(t) \cdot (\vec{r}''(t) \times \vec{r}'''(t))}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|^2}$$

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d}{ds} \vec{T} \right\| = \kappa \vec{N} \quad \frac{d}{ds} \vec{N} = \tau \vec{B} - \kappa \vec{T} \quad \frac{d}{ds} \vec{B} = -\tau \vec{N}$$

Plano normal

Ecuación vectorial:

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$$

Ecuación paramétrica:

$$x_0'(x - x_0) + y_0'(y - y_0) + z_0'(z - z_0) = 0$$

Plano rectificante (\vec{t}, \vec{b}) en t_0

Ecuación vectorial:

$$(\vec{r} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{n}(t_0) = 0$$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ y'_0 z''_0 - y''_0 z'_0 & z'_0 x''_0 - z''_0 x'_0 & x'_0 y''_0 - x''_0 y'_0 \end{vmatrix} = 0$$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

$$a_T = \vec{a} \cdot \vec{T} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{v}\|}$$

$$a_N = \vec{a} \cdot \vec{N} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{v} & \vec{a} \\ v_x & a_x \end{vmatrix} \right\|}{\|\vec{v}\|}$$

Propiedades de la divergencia

I) $\text{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{div}(\vec{F}) + \text{div}(\vec{G})$

II) $\text{div}(\phi \vec{F}) = \phi \text{div}(\vec{F}) + (\text{grad } \phi) \cdot \vec{F}$

III) $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot [\text{rot}(\vec{F})] - \vec{F} \cdot [\text{rot}(\vec{G})]$

Trigonometría

Medida de ángulos planos

Representación

La medida de un ángulo puede expresarse en unidades (grados) o en unidades de arco (radianes). Se representa a respectivamente, por α y $\hat{\alpha}$.

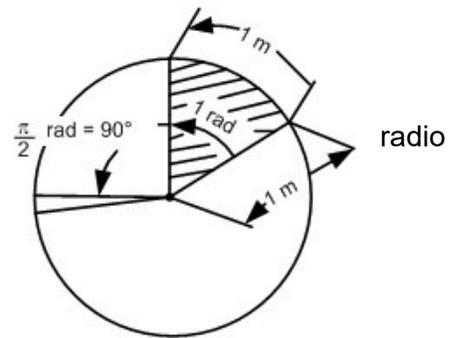
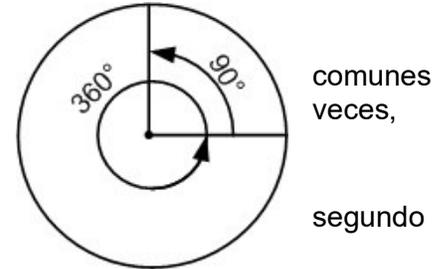
Unidades comunes (sexagesimales): grado ($^{\circ}$), minuto ($'$), ($''$).

el $1^{\circ} = 60'$; $1' = 60''$

Unidad de arco

1 radián (rad) es el ángulo central de una circunferencia de unitario que intercepta un arco también unitario. Por lo tanto,

$$1 \text{ rad} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1 \text{ (número adimensional)}$$



Con frecuencia no se indica específicamente la unidad, como en la siguiente tabla.

α	0°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
$\hat{\alpha}$	0	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$5\pi / 12$	$\pi / 2$	π	$3\pi / 2$	2π
	0	0.52	0.78	1.05	1.31	1.57	3.14	4.71	6.28

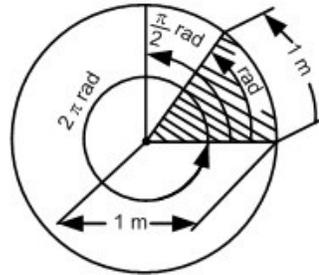
Equivalencias. Por definición

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.2967^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.017453 \text{ rad}$$

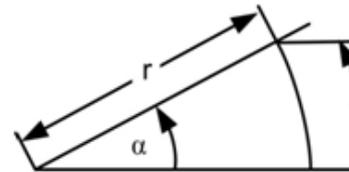
$$\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \alpha = \frac{\alpha}{57.2967}$$

$$\hat{\alpha} = \text{arc } \alpha = \frac{\text{longitud de arco}}{\text{radio}}$$



La longitud de un arco (b) es el producto del radio r y el ángulo central $\hat{\alpha}$ (en radianes) de la circunferencia:

$$b = r\hat{\alpha}$$



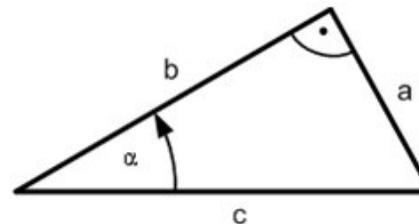
Funciones trigonométricas

En un triángulo rectángulo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c};$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c};$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b};$$



Operaciones con funciones trigonométricas

$$\text{sen}^2 A + \text{cos}^2 A = 1$$

$$\text{sec}^2 A - \text{tan}^2 A = 1$$

$$\text{csc}^2 A - \text{cot}^2 A = 1$$

$$\text{tan } A = \frac{\text{sen } A}{\text{cos } A}$$

$$\text{cot } A = \frac{\text{cos } A}{\text{sen } A}$$

$$\text{sen}^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos}^2 A$$

$$\text{cos}^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{cos}^2 A$$

$$\text{sen}^2 A = 2 \text{sen } A \text{cos } A$$

$$\text{cos}^2 A = \text{cos}^2 A - \text{sen}^2 A$$

$$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen } A \text{cos } B \pm \text{cos } A \text{sen } B$$

**Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$$\operatorname{sen} A \operatorname{csc} A = 1$$

$$\operatorname{csc} A \operatorname{sen} A = 1$$

$$\operatorname{tan} A \operatorname{cot} A = 1$$

$$\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{cos}(-A) = \operatorname{cos} A$$

$$\operatorname{tan}(-A) = -\operatorname{tan} A$$

$$\operatorname{cos}(A \pm B) = \operatorname{cos} A \operatorname{cos} B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{tan}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tan} A \pm \operatorname{tan} B}{1 \mp \operatorname{tan} A \operatorname{tan} B}$$

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} A}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} A}{2}}$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(A - B) - \operatorname{cos}(A + B)]$$

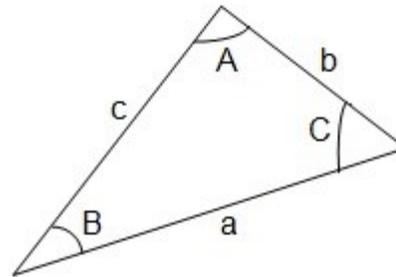
$$\operatorname{sen} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$$

$$\operatorname{cos} A \operatorname{cos} B = \frac{1}{2} [\operatorname{cos}(A - B) + \operatorname{cos}(A + B)]$$

Las leyes siguientes son válidas para cualquier triángulo plano ABC de lados a, b, c y de ángulos A, B, C.

Ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{cos} C$$

Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar

Ley de las tangentes

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tan} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tan} \frac{1}{2}(A - B)}$$

Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar

Números complejos

Forma trigonométrica o polar de un número complejo

Se tiene que $r = |z| = |(x, y)|$ y que $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Luego:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$z = (x, y) = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Forma exponencial de un número complejo

Sea $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ un número complejo donde r es su módulo y θ su argumento. Entonces, mediante el empleo de la fórmula de Euler, se obtiene:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$

Teorema de De Moivre

Siendo p un número real cualquiera, el teorema de De Moivre establece que

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^p = r^p [\cos(p\theta) + i \sin(p\theta)]$$

Sea n cualquier entero positivo y $p = \frac{1}{n}$, entonces

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

donde k es un entero positivo. De aquí se pueden obtener las raíces n -ésimas distintas de un número complejo haciendo $k = 0, 1, 2, \dots$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Resolución geométrica de ecuaciones

Definiciones geométricas importantes

Producto mixto (triple producto escalar)	$[\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
Ángulo entre dos vectores	$\cos \theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{ \bar{a} \bar{b} }; \quad \text{sen} \theta = \frac{ \bar{a} \times \bar{b} }{ \bar{a} \bar{b} }$
Ecuación vectorial de la recta	$\bar{p} = \bar{p}_o + t\bar{u}$
Ecuaciones paramétricas de la recta	$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \quad \bar{u} = (a, b, c)$
Ecuaciones cartesianas de la recta, en forma simétrica	$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c};$ $\bar{u} = (a, b, c)$
Distancia de un punto Q a una recta	$d = \frac{ \overline{P_o Q} \times \bar{u} }{ \bar{u} }$
Distancia entre dos rectas	$d = \frac{ \overline{P_1 P_2} \cdot (\bar{u}_1 \times \bar{u}_2) }{ \bar{u}_1 \times \bar{u}_2 }$
Ecuación vectorial de un plano	$\bar{p} = \bar{p}_o + r\bar{u} + s\bar{v}$
Ecuaciones paramétricas de un plano	$\begin{cases} x = x_o + ru_x + sv_x \\ y = y_o + ru_y + sv_y \\ z = z_o + ru_z + sv_z \end{cases}$
Ecuación cartesiana de un plano en forma general	$Ax + By + Cz + D = 0; \quad \bar{N} = (A, B, C)$
Ecuación normal de un plano	$\overline{rP} \cdot \bar{N} = 0; \quad \bar{N} = (A, B, C)$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Distancia de un punto Q a un plano	$d = \frac{ \overline{PoQ} \cdot \overline{N} }{ \overline{N} }$
Ángulo entre una recta y un plano	$\text{sen } \alpha = \frac{ \overline{u} \cdot \overline{N} }{ \overline{u} \overline{N} }$

Álgebra

Fórmulas para potencias y raíces

$p \cdot a^n \pm q \cdot a^n = (p \pm q) \cdot a^n$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{a^n}{b^n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$p \cdot \sqrt[n]{a} \pm q \cdot \sqrt[n]{a} = (p \pm q) \cdot \sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{a^{m \cdot x}} = \sqrt[n]{a^m}^x$
$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ *	$\sqrt{-a} = i \cdot \sqrt{a}$
* No es válida en algunos casos; p. ej., $\sqrt{(-2)^2} = +2, (\sqrt{-2})^2 = -2$	

Nota: Los exponentes para potencias y raíces deben ser escalares.

Transformación de expresiones algebraicas usuales

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$x^2 + px + q = 0 \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$(a - b + c)^2 = a^2 - 2ab + 2ac + b^2 - 2bc + c^2$
$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots$	
$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$ (solo para n par)	

Logaritmos

$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$	$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$
$\log x^n = n \log x$	$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x$

Binomio de Newton

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 + \dots$$

Donde n tiene que ser un número entero y

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Permutaciones

Número de permutaciones de n elementos

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots$$

Combinaciones y ordenaciones

Número de combinaciones sin repetición	Número de combinaciones con repetición
$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	${}^r C_k^n = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$ r con repetición

Número de ordenaciones sin repetición	Número de ordenaciones con repetición
$O_k^n = C_k^n \cdot P_k = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$	${}^r O_k^n = n^k$

donde:

C: número de combinaciones posibles

n: número de elementos dados

k: número de elementos seleccionados de entre n elementos dados

O: número de ordenaciones posibles

Serie binómica o binomial

$$f(x) = (1 \pm x)^\alpha = 1 \pm \binom{\alpha}{1}x + 1 \pm \binom{\alpha}{2}x^2 + 1 \pm \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots$$

α es un número cualquiera, positivo o negativo, entero o fraccionario

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

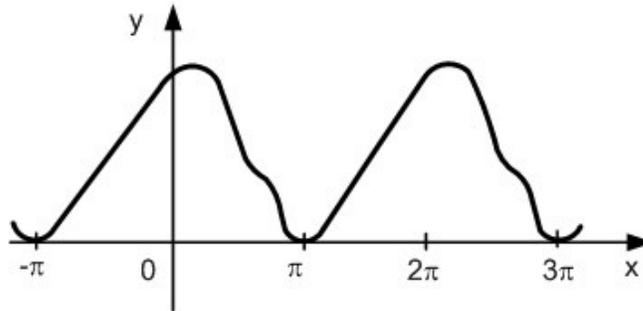
Serie de Taylor (serie de Maclaurin)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Forma de Maclaurin, cuando $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Series de Fourier



Generalidades: Toda función periódica $f(x)$, que puede descomponerse en el intervalo de periodicidad $-\pi \leq x \leq \pi$ en un número finito de intervalos continuos, podrá descomponerse en ese intervalo en una serie convergente de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

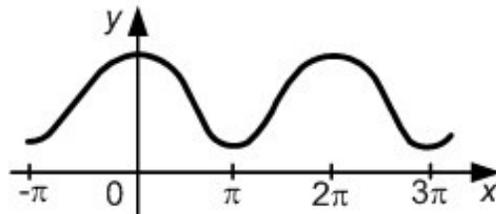
Los coeficientes de cada término se forman como sigue:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Funciones pares: $f(x) = f(-x)$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{Para } k = 0, 1, 2, \dots$$

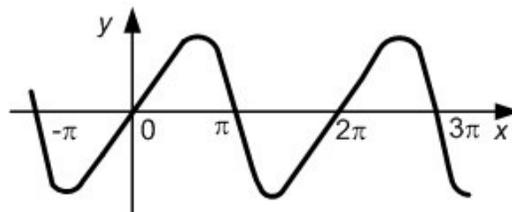
$$b_k = 0$$



Funciones impares: $f(x) = -f(-x)$

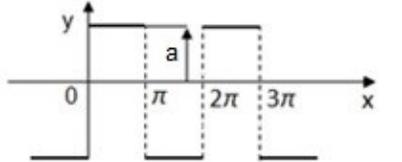
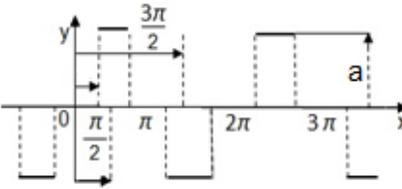
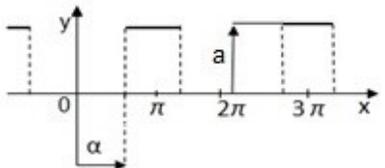
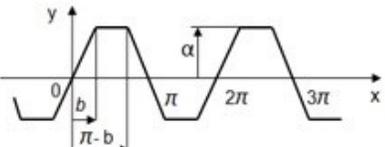
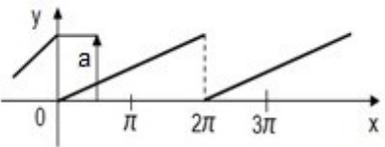
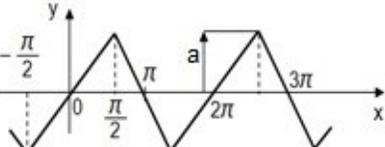
$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{Para } k = 0, 1, 2, \dots$$

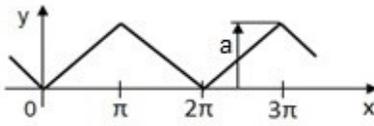
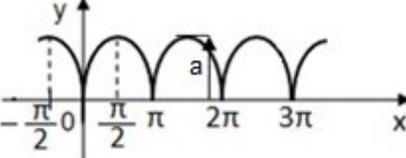
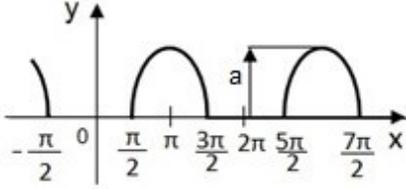
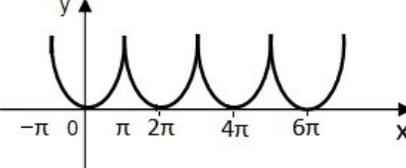
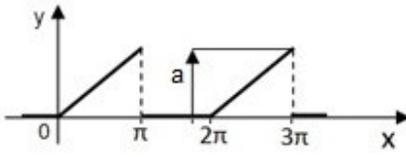


Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
 Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Tablas de desarrollo en series de Fourier

$y = a \text{ para } 0 < x < \pi$ $y = -a \text{ para } \pi < x < 2\pi$ $y = \frac{4a}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right]$	
$y = a \text{ para } \alpha < x < \pi - \alpha$ $y = -a \text{ para } \pi + \alpha < x < 2\pi - \alpha$ $y = \frac{4a}{\pi} \left[\cos \alpha \sin x + \frac{1}{3} \cos(3\alpha) \sin(3x) + \frac{1}{5} \cos(5\alpha) \sin(5x) + \dots \right]$	
$y = a \text{ para } \alpha < x < 2\pi - \alpha$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{2a}{\pi} \left[\frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\sin(\pi - \alpha)}{1} \cos x + \frac{\sin 2(\pi - \alpha)}{3} \cos 2x - \frac{\sin 3(\pi - \alpha)}{3} \cos 3x + \dots \right]$	
$y = ax / b \text{ para } 0 \leq x \leq b$ $y = a \text{ para } b \leq x \leq \pi - b$ $y = a(\pi - x) / b \text{ para } \pi - b \leq x \leq \pi$ $y = \frac{4a}{\pi b} \left[\frac{1}{1^2} \sin b \sin x + \frac{1}{3^2} \sin(3b) \sin(3x) + \frac{1}{5^2} \sin(5b) \sin(5x) + \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{2\pi} \text{ para } 0 < x < 2\pi$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right]$	
$y = 2ax / \pi \text{ para } 0 \leq x \leq \pi / 2$ $y = 2a(\pi - x) / \pi \text{ para } \pi / 2 \leq x \leq \pi$ $y = -f(\pi + x)$ $y = \frac{8}{\pi^2} a \left[\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right]$	

**Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

$y = ax / \pi \text{ para } 0 \leq x \leq \pi$ $y = a(2\pi - x) / \pi \text{ para } \pi < x < 2\pi$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$	
$y = a \sin x \text{ para } 0 \leq x \leq \pi$ $y = -a \sin x \text{ para } \pi \leq x \leq 2\pi$ $y = f(\pi + x)$ $y = \frac{2a}{\pi} - \frac{4a}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right]$	
$y = 0 \text{ para } 0 \leq x \leq \pi / 2$ $y = a \sin(x - \pi / 2) \text{ para } \pi / 2 \leq x \leq 3\pi / 2$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{2a}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \cos x + \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} - \frac{\cos 4x}{4^2 - 17} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} - \dots \right]$	
$y = x^2 \text{ para } \pi \leq x \leq -\pi$ $y = f(-x) = f(2\pi + x)$ $y = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right]$	
$y = \frac{ax}{\pi} \text{ para } 0 < x < \pi$ $y = f(2\pi + x)$ $y = \frac{a}{4} - \frac{2a}{\pi^2} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right]$ $+ \frac{a}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$	

Cálculo diferencial

Relación de cambio: derivada

Pendiente en un punto. Relación (o intensidad) de cambio

Pendiente de una curva

En una curva $y = f(x)$, la pendiente m varía en cada punto. La pendiente de la curva en un punto P es también la pendiente de su tangente en dicho punto:

$$m = \tan \alpha = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$$

Relación media de cambio (cociente incremental)

La intensidad media de variación de la función $y = f(x)$ es la relación de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ correspondientes al segmento de curva PP_1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivada (cociente diferencial)

Cuando Δx tiende a cero, el punto P_1 tiende al punto P , y la secante PP_1 , a la tangente a la curva en P . De manera que la relación de incrementos se convierte en la relación de diferenciales, que es la derivada (o intensidad de cambio) de la función en P :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Interpretación geométrica de la derivada

Curvas de derivadas sucesivas

Si para cada x de una curva se lleva la pendiente (o derivada) correspondiente y' como ordenada, se obtendrá la curva de $y' = f'(x)$, o de la primera derivada de la curva dada $y = f(x)$. Si se deriva la curva $y' = f'(x)$ se obtendrá $y'' = f''(x)$ o la segunda derivada de la curva dada $y = f(x)$.

Ejemplo: $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Radio de curvatura ρ en un punto dado x

$$\rho = \frac{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}{y''}$$

Coordenadas del centro de curvatura C correspondiente a un radio ρ

$$a = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y'$$

$$b = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

Determinación de los valores máximos, mínimos y puntos de inflexión

Valores máximos y mínimos

Hágase $y' = 0$ y sea a el valor obtenido de x . Sustitúyase ahora $x = a$ en y''

Si $y''(a) > 0$ habrá un mínimo en $x = a$

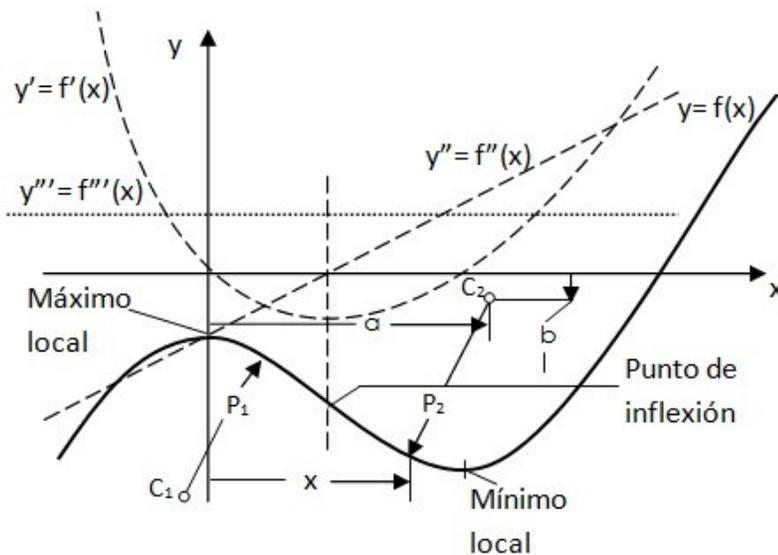
Si $y''(a) < 0$ habrá un máximo en $x = a$

Punto de inflexión

Hágase $y'' = 0$ y sea a el valor obtenido de x . Sustitúyase ahora $x = a$ en y'''

Si $y'''(a) \neq 0$ habrá un punto de inflexión en $x = a$

Forma de la curva $y = f(x)$



Crecimiento y decrecimiento

- $y'(x) > 0$ $y(x)$ crece si aumenta x
 $y'(x) < 0$ $y(x)$ decrece si aumenta x
 $y'(x) = 0$ $y(x)$ tiene en x una tangente paralela al eje x

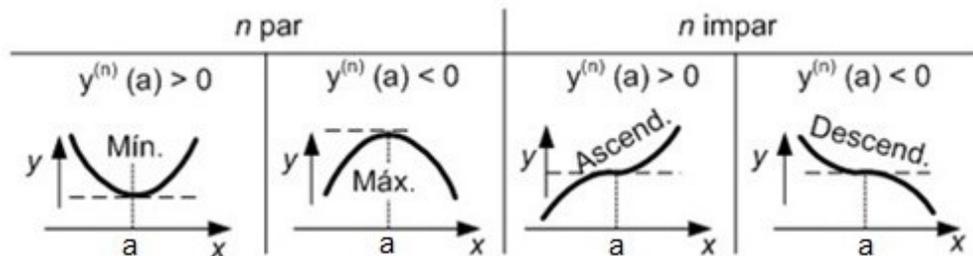
Curvatura

- $y''(x) > 0$ $y(x)$ será cóncava hacia arriba
 $y''(x) < 0$ $y(x)$ será cóncava hacia abajo
 $y''(x) = 0$ con cambio de signo $y(x)$ tendrá en x un punto de inflexión
 sin cambio de signo $y(x)$ tendrá en x un máximo o un mínimo

Otros casos

Si para $x = a$

$y'(a) = y''(a) = y'''(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0$, pero $y^n \neq 0$, pueden presentarse los cuatro casos siguientes:



Tablas de derivadas

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(cx) = c$
$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \dots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \dots$
$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(uvw) = uv \frac{dw}{dx} + u w \frac{dv}{dx} + v w \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$
$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{dx/du}$
$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx}$ (Regla de la cadena)	

Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

$\frac{d}{dx} u^v = \frac{d}{dx} e^{v \ln u} = e^{v \ln u} \frac{d}{dx} [v \ln u] =$ $vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx} \quad a > 0, a \neq 1$
$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{d}{dx} \log_e u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$	

Derivadas de las funciones trigonométricas y de las trigonométricas inversas

$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \operatorname{cos} u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{cot} u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{cos} u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sec} u = \operatorname{sec} u \operatorname{tan} u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{tan} u = \operatorname{sec}^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{csc} u = -\operatorname{csc} u \operatorname{cot} u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad \left[0 < \cos^{-1} u < \pi \right]$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{sen}^{-1} u < \frac{\pi}{2} \right]$
$\frac{d}{dx} \operatorname{tan}^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad \left[-\frac{\pi}{2} < \operatorname{tan}^{-1} u < \frac{\pi}{2} \right]$	$\frac{d}{dx} \operatorname{cot}^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad \left[0 < \operatorname{cot}^{-1} u < \pi \right]$
$\frac{d}{dx} \operatorname{sec}^{-1} u = \frac{1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\left[\begin{array}{l} +si \quad 0 < \operatorname{sec}^{-1} u < \frac{\pi}{2} \\ -si \quad \frac{\pi}{2} < \operatorname{sec}^{-1} u < \pi \end{array} \right]$	$\frac{d}{dx} \operatorname{csc}^{-1} u = \frac{-1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\mp}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\left[\begin{array}{l} -si \quad 0 < \operatorname{csc}^{-1} u < \frac{\pi}{2} \\ +si \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{csc}^{-1} u < 0 \end{array} \right]$

Derivadas de las funciones hiperbólicas y de las hiperbólicas recíprocas

$\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csc} h^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sec} h^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} h^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad [-1 < u < 1]$
$\frac{d}{dx} \operatorname{csc} h^{-1} u = \frac{-1}{ u \sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx},$ [- si $u > 0$, + si $u < 0$]	$\frac{d}{dx} \operatorname{cosh}^{-1} u = \frac{\pm 1}{\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx},$ [+ si $\operatorname{cosh}^{-1} u > 0, u > 1$ - si $\operatorname{cosh}^{-1} u < 0, u < 1$]
$\frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} u = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \frac{du}{dx},$ [- si $\operatorname{sech}^{-1} u > 0, 0 < u < 1$ + si $\operatorname{sech}^{-1} u < 0, 0 < u < 1$]	$\frac{d}{dx} \operatorname{coth}^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx},$ [$u > 1$ ó $u < -1$]

Cálculo integral

Significado de la integración

Por integración se entiende el encontrar una función $F(x)$ a partir de una función dada $y = f(x)$ de manera que la derivada $F'(x)$ sea igual a la original $f(x)$. Por lo tanto,

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

La integral indefinida

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

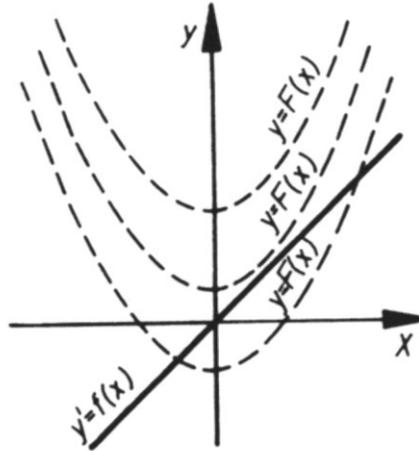
Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

C es una constante indeterminada que desaparece al derivar, ya que la derivada de una constante es igual a cero.

Significado geométrico de la integral indefinida.

Como muestra la figura, hay una infinidad de curvas $y = F(x)$ con pendiente o derivada $y' = f(x)$. curvas $y = f(x)$ son iguales pero desplazadas paralelamente y en la dirección del eje y . La C fija una curva determinada. Si la curva debe pasar por el punto x_0, y_0 se tendrá:

$$C = y_0 - F(x_0)$$



curvas
Todas las

constante
pasar por el

La integral definida

La integral definida tiene la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

En la integral resultante se sustituye primero el límite superior y luego el interior, y se resta el segundo resultado del primero. Desaparece así la constante C.

Reglas de integración

Formas fundamentales

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Fuente: Spiegel, (1998)

Formas trigonométricas

$$\int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C$$

$$\int \operatorname{csc} u \cot u du = -\operatorname{csc} u + C$$

$$\int \operatorname{csc} u du = \ln|\operatorname{csc} u - \cot u| + C$$

$$\int \tan u du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\int \cot u du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$$

$$\int \operatorname{csc}^2 u du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$\int \operatorname{csc} u du = \ln|\operatorname{csc} u - \cot u| + C$$

Formas cuadráticas

$$\int \sqrt{a^2+u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int u^2 \sqrt{a^2+u^2} du = \frac{u}{8} (a^2+2u^2) \sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{8} \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C \quad \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} du = \sqrt{a^2+u^2} - a \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u} \right| + C \quad \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \text{sec}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2 u} + C \quad \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2+u^2}} + C \quad \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C \quad \int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u} \right| + C$$

$$\int u^2 \sqrt{a^2-u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2-a^2) \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8} \text{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C \quad \int \sqrt{a^2-u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \text{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2} \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C \quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}| + C$$

$$\int \sqrt{u^2-a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C \quad \int \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \text{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} du = \sqrt{a^2-u^2} - a \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right| + C \quad \int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} du = -\frac{1}{u} \sqrt{a^2-u^2} - \text{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} \right| + C \quad \int u^2 \sqrt{u^2-a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2-a^2) \sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8} \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2 u} \sqrt{a^2-u^2} + C \quad \int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} du = \sqrt{u^2-a^2} - a \cos^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$\int (a^2-u^2)^{3/2} du = -\frac{u}{8} (2u^2-5a^2) \sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8} \text{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C \quad \int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2-u^2}} + C \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C \quad \int \frac{u du}{a+bu} = \frac{1}{b^2} (a+bu - a \ln|a+bu|) + C$$

$$\int \frac{du}{u^n \sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}} \quad \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2 u} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3} [(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2 \ln|a+bu|] + C$$

$$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 - a^2}} + C$$

$$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C, \text{ si } a > 0$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \text{ si } a < 0$$

$$\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

$$\int \frac{udu}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b} \ln|a+bu| + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

$$\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C$$

$$\int \frac{udu}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu - 2a)\sqrt{a+bu}$$

$$\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln|a+bu| \right) + C$$

$$\int \frac{u^n du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n \sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}}$$

$$\int u\sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^2} (3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + C$$

Otras formas trigonométricas

$$\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \csc^2 u du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$\int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du$$

$$\int \cos^2 u du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin 2u + C$$

$$\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$$

$$\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$$

$$\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du$$

$$\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$$

$$\int \cot^n u du = \frac{-1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du$$

$$\int \sin^3 u du = -\frac{1}{3} (2 + \sin^2 u) \cos u + C$$

$$\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$$

$$\int \cos^3 u du = \frac{1}{3} (2 + \cos^2 u) \sin u + C$$

$$\int \csc^n u du = \frac{1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du$$

$$\int \tan^3 u du = \frac{1}{2} \tan^2 u + \ln|\sec u| + C$$

$$\int \sin au \sin bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int \cot^3 u du = -\frac{1}{2} \cot^2 u - \ln|\sin u| + C$$

$$\int \cos au \cos bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int u^n \cos u du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u du$$

$$\int \sin au \cos bu du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

$$\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

$$\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u \, du$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u \, du$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u \, du$$

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen} u \, du = u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du$$

$$\int u \cos^{-1} u \, du = \frac{2u^2 - 1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

$$\int u \operatorname{tan}^{-1} u \, du = \frac{u^2 + 1}{2} \operatorname{tan}^{-1} u - \frac{u}{2} + C$$

$$\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], n \neq -1$$

$$\int \operatorname{sen}^{-1} u \, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$\int u^n \cos^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right], n \neq -1$$

$$\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$$

$$\int u^n \operatorname{tan}^{-1} u \, du = \frac{1}{n+1} \left[u^{n+1} \operatorname{tan}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1+u^2}} \right], n \neq -1$$

$$\int \operatorname{tan}^{-1} u \, du = u \operatorname{tan}^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$$

Formas exponenciales y logarítmicas

$$\int u e^{au} \, du = \frac{1}{a^2} (au - 1) e^{au} + C$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u + C$$

$$\int u^n e^{au} \, du = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au} \, du$$

$$\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C$$

$$\int e^{au} \operatorname{sen} bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bu - b \cos bu) + C$$

$$\int \frac{1}{u \ln u} \, du = \ln |\ln u| + C$$

$$\int e^{au} \cos bu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \operatorname{sen} bu) + C$$

Formas hiperbólicas

$$\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \ln \left| \operatorname{tan}^{-1} \frac{1}{2} u \right| + C$$

$$\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tanh} u + C$$

$$\int \operatorname{tanh} u \, du = \ln |\cosh u| + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\operatorname{coth} u + C$$

$$\int \operatorname{coth} u \, du = \ln |\operatorname{senh} u| + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \operatorname{tanh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \operatorname{tan}^{-1} |\operatorname{senh} u| + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \operatorname{coth} u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

Otras formas cuadráticas

$$\int \sqrt{2au - u^2} \, du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left(\frac{a-u}{a} \right) + C$$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

$$\int u\sqrt{2au-u^2} du = \frac{2u-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2} du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$$

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
 Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Aplicaciones de la integración

$$\text{Diferencial de arco } dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

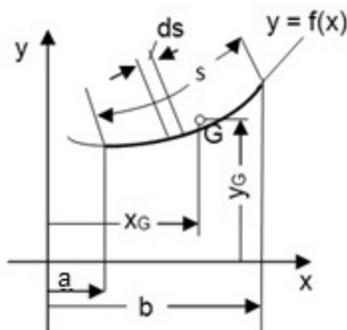
Longitud de arco	Área de la superficie generada por el giro de una curva alrededor del eje x
$S = \int_a^b \sqrt{1+y^2} dx$	$A_s = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y^2} dx$

Momento estático de una curva con respecto al

eje x	eje y
$M_x = \int_a^b y \sqrt{1+y^2} dx$	$M_y = \int_a^b x \sqrt{1+y^2} dx$

Coordenadas del centroide G

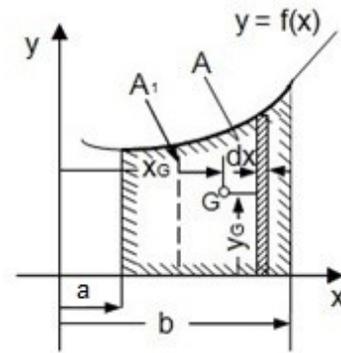
$x_G = \frac{M_y}{S}$	$y_G = \frac{M_x}{S}$
-----------------------	-----------------------



	Volumen de un	
Área de una superficie	sólido generado por el giro de la superficie A alrededor del eje x	sólido cuya sección transversal A , es función de x
$A = \int_a^b y \cdot dx$	$V = \pi \int_a^b y^2 \cdot dx$	$V = \int_a^b A_t(x) \cdot dx$

**Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Momento estático de una superficie con respecto al eje x	eje y
$Q_x = \int_a^b \frac{y^2}{2} \cdot dx$	$Q_y = \int_a^b xy \, dx$
Coordenadas del centroide G	
$x_G = \frac{Q_y}{A}$	$y_G = \frac{Q_x}{A}$

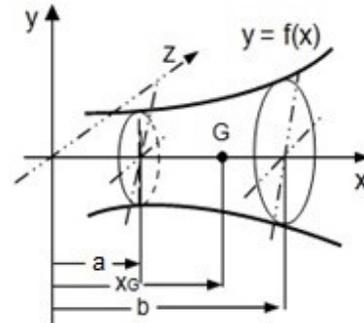


Momento estático del volumen de un cuerpo con relación al plano yz

$$M_{yz} = \pi \int_a^b xy^2 \cdot dx$$

Coordenadas del centroide G

$$x_G = \frac{M_{yz}}{V}$$



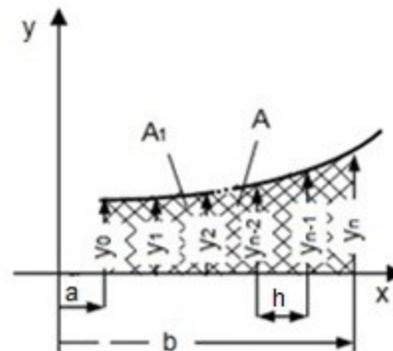
Integración numérica

Se divide la superficie en un número par n de franjas de igual ancho

$$h = \frac{b-a}{n}$$

El área se calcula entonces con la fórmula trapezoidal

$$A = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$$



Regla de Simpson

Para curvas hasta de tercer grado

$$A_i = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Para curvas de grado mayor que el tercero

$$A = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})]$$

Es la longitud de curva correspondiente al intervalo paramétrico a, t .

	En parámetro arbitrario:	En parámetro s:
Vector tangente unitario	$\vec{t}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\ \vec{r}'(t)\ }$	$\vec{t}(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(s)}{\ \dot{\vec{r}}(s)\ }$
Vector normal principal	$\vec{n}(t) = \frac{\vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)}{\ \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)\ }$	$\vec{n}(s) = \frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{\ \ddot{\vec{r}}(s)\ }$
Vector binormal	$\vec{b}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }$	$\vec{b}(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)}{\ \dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)\ }$

Ecuación satisfecha por la carga de un circuito RLC $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t)$

Fuerza ejercida por un fluido $F = \int_a^b \gamma y \cdot L(y) dy$

Fuerza que actúa sobre un líquido encerrado en un tubo

$$F = P \cdot A = \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

Ley de Torricelli $v = \sqrt{2gh}$

Física

Cinemática

$$F = xi + yj + zk \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_n \quad \vec{v} = v \hat{u}_t$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{u}_r + \dot{\theta} r \hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \hat{u}_\theta$$

Movimiento en una dimensión

$$x = vt$$

$$x = x_o + vt$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_o)$$

$$v = v_o + at$$

$$x = x_o + \frac{1}{2}(v_o + v)t$$

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$$

Dinámica

$$\vec{F} = m\vec{a} = \left(\frac{W}{g} \right) \vec{a} \quad W: \text{peso}$$

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

$$\sum F = m \, dV / dt$$

$$X_{B/A} = X_B - X_A$$

$$V_{B/A} = V_B - V_A$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$$

Trabajo, energía y conservación de la energía

$$U = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$P = \frac{U}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{r}}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad P: \text{potencia}$$

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} \quad \eta : \text{eficiencia}$$

$$U = \Delta K = K_f - K_i$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad K: \text{energía cinética}$$

$$W = -\Delta V = V_f - V_i \quad V: \text{energía potencial}$$

$$V(y) = mgy$$

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2$$

Impulso e ímpetu

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt$$

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad p: \text{ímpetu}$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int \vec{F} dt \quad \Delta \vec{p} : \text{impulso}$$

Electricidad y magnetismo

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad |\vec{F}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \vec{r} = r_1 - r_2$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Φ_E : flujo eléctrico

$$V = k \frac{q}{r}$$

V: potencial electrostático

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -\frac{W_{ab}}{q} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

U: energía potencial electrostática

Formulario para el sustentante del
Examen General para el Egreso de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO)
Subdirección de Evaluación de Egreso en Diseño, Ingenierías y Arquitectura

Capacitancia

$$q = CV \quad C: \text{capacitancia}$$

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{Capacitor de placas paralelas}$$

$$C = \epsilon \frac{A}{d} \quad \epsilon = k \epsilon_0 \quad k: \text{constante dieléctrica}$$

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{2\pi l}{\ln(b/a)} \quad \text{Capacitor cilíndrico}$$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV \quad U: \text{energía almacenada en un capacitor}$$

$$u = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 E^2 \quad u: \text{densidad de energía}$$

Corriente, resistencia y fuerza electromagnética

$$i = \frac{q}{t} \quad i: \text{corriente eléctrica}$$

$$i = n q v A$$

$$j = \frac{i}{A} = \sum_i n_i q_i v_i \quad j: \text{densidad de corriente}$$

$$A: \text{área}$$

$$\rho = \frac{E}{j} \quad \rho: \text{resistividad}$$

$$R = \frac{V}{i} = \rho \frac{l}{A} \quad R: \text{resistencia}$$

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta t) \quad \text{Variación de } R \text{ con la temperatura}$$

$$V_{ab} = \sum IR - \sum \mathcal{E}$$

$$\sum i_{ent.} = \sum i_{sal.}$$

$$\sum \text{Elev. de potencial} = \sum \text{caídas de potencial} \quad \sum v_i = 0$$

$$P = iV = i^2 R = \frac{V^2}{R} \quad P: \text{potencia eléctrica}$$

Magnetismo

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{v}: \text{velocidad}$$

$$\vec{B}: \text{campo magnético}$$

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \quad \vec{l}: \text{elemento de longitud}$$

$$\tau = NiAB \sin \theta$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad r: \text{distancia}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 a}$$

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \quad N: \text{número de vueltas}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\theta \, d\theta \quad r: \text{radio}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \varepsilon : \text{fuerza electromagnética}$$

$$\varepsilon = -vBl$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Momentos de inercia

Definición general

Momento de inercia con respecto a un eje x o un punto O , es la suma de los productos de elementos de longitud, área, volumen o masa, por el cuadrado de su distancia al eje o punto:

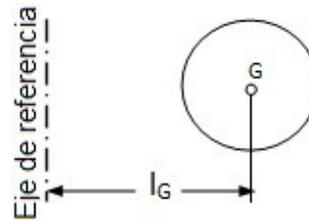
$$I = \int x^2 \cdot dm$$



Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

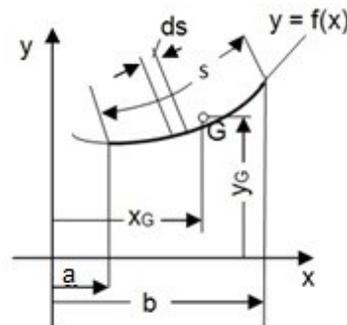
Para cualquier momento de inercia (de longitud, área, volumen o masa), axial o polar, se verifica que:

$$J = J_G + ml_G^2$$



Momentos de inercia de una curva plana con respecto al

eje x	eje y
$I_{Lx} = \int_a^b y^2 \sqrt{1+y^2} dx$	$I_{Ly} = \int_a^b x^2 \sqrt{1+y^2} dx$



En las ecuaciones anteriores:

I : momento de inercia con respecto al eje de referencia

J : momento polar de inercia con respecto al eje de referencia

J_G : momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centroide G

m : magnitud considerada (longitud, área, volumen o masa)

l_G : distancia del centroide al eje o punto de referencia

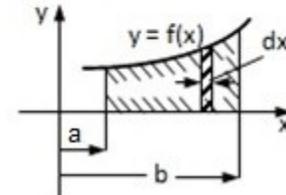
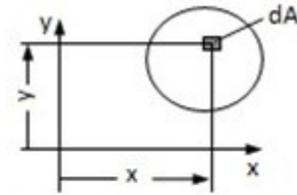
Momentos y productos de inercia de superficies planas

El *momento de inercia axial* de una superficie plana respecto a un eje x o y , situado en su plano, es igual a la suma de los productos de los elementos de área dA y el cuadrado de las distancias a los respectivos, y o x , respectivamente

$$I_x = \int y^2 dA ; \quad I_y = \int x^2 dA$$

Si se da la función $y = f(x)$, entonces:

Con respecto al	
eje x	eje y
$I_x = \int_a^b \frac{y^3}{3} dx$	$I_x = \int_a^b x^2 y \cdot dx$

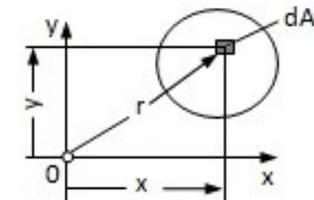


El *momento de inercia polar* de una superficie plana respecto a un punto O situado en su plano es igual a la suma de los productos de los elementos del área dA y el cuadrado de su distancia r a dicho punto (polo):

$$J_O = \int r^2 dA$$

Si los ejes de referencia de los momentos de inercia I_x e I_y son perpendiculares y se cortan en O , existe entre el momento polar y los axiales la relación:

$$I_O = \int r^2 dA + \int (y^2 + x^2) dA = I_x + I_y$$

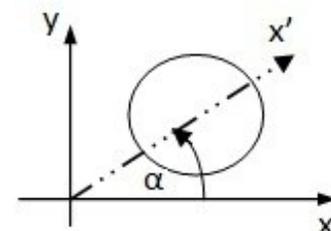
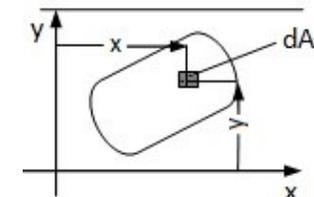


El *producto de inercia de una superficie plana* respecto a los ejes situados en su plano es igual a la suma de los productos de los elementos de área dA y las distancias x, y , a ambos ejes:

$$I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA \geq 0 ; \text{ o bien } \leq 0$$

Transformación a un eje inclinado x' : si se conocen para los ejes perpendiculares x, y , y las cantidades I_x, I_y e I_{xy} , entonces el momento de inercia axial $I_{x'}$, con respecto a un eje inclinado un ángulo α con respecto al eje x , es igual a:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$



Ejemplos de cálculo de momentos de inercia y superficies planas

Rectángulo

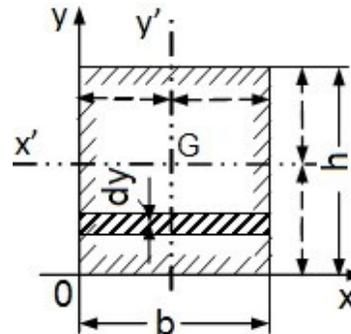
$$I_x = \int_0^h y^2 b \cdot dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{x'} = I_x - A \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{3}; I_{y'} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_O = I_x + I_y = \frac{bh^3}{3} + \frac{b^3 h}{3} = \frac{bh}{3} (b^2 + h^2); I_G = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2)$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + \frac{b h}{2} A$$



Como $x' y' / y'$ son ejes de simetría, $I_{xy} = 0$, entonces

$$I_{xy} = \frac{b h}{2} \frac{bh}{2} = \left(\frac{bh}{2} \right)^2$$

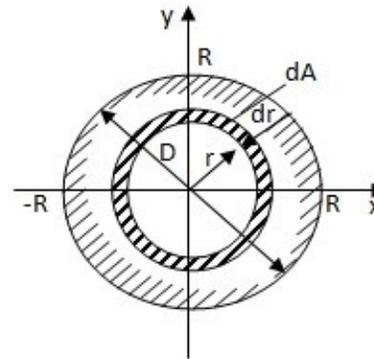
Círculo

$$I_O = \int_0^R r^2 dA = \int_0^R r^2 (2\pi r) dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$I_x = I_y = \frac{I_O}{2} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$I_{xy} = 0$, puesto que x, y son los ejes de simetría



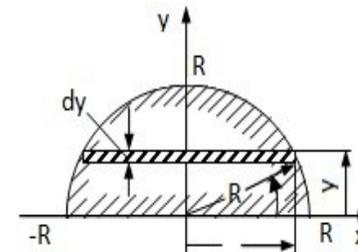
Semicírculo

$$I_x = \int_0^R y^2 dA = \int_0^R y^2 (2x) dy$$

$$= 2 \int_0^R y^2 \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{\pi R^4}{8} = I_y$$

$$I_O = 2 \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi R^4}{4}; I_{xy} = 0,$$

Porque y es eje de simetría.



Polígono regular de n lados

$$I_x = I_y = \frac{I_O}{2} = \frac{n \cdot a \cdot r}{2 \times 48} (12r^2 + a^2); I_{xy} = 0$$

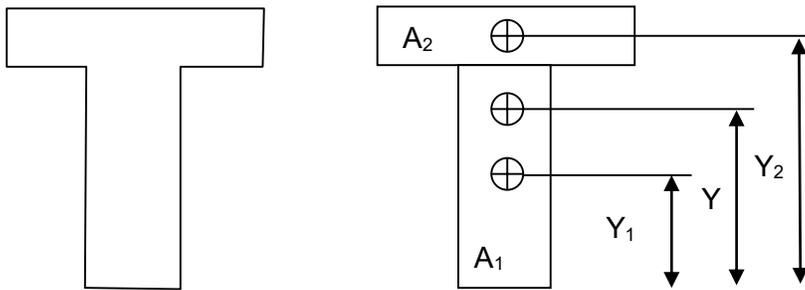
Donde

r Radio de la circunferencia Inscrita	R Radio de la circunferencia circunscrita
a Longitud del lado	a Número de lados

Teorema de ejes paralelos

Para calcular el momento de inercia de secciones compuestas es conveniente aplicar el teorema de los ejes paralelos.

Distancia al centroide



Distancia al centroide

la sección considerada

$$Y = \frac{\sum Y_n A_n}{A_T}$$

Y = Distancia al centroide de la sección desde la referencia marcada

Y_n = Distancia desde la referencia al centroide de la sección del area

A_n = Area de la sección considerada

A_T = Area total de la sección original

Momento de inercia de la sección compuesta

$$I = \sum I_n + A_n(d)^2$$

I_n = Momento de inercia de la sección

A_n = Area correspondiente a la sección considerada

d = distancia intercentroidal entre el centroide global de la sección y el centroide de cada área considerada

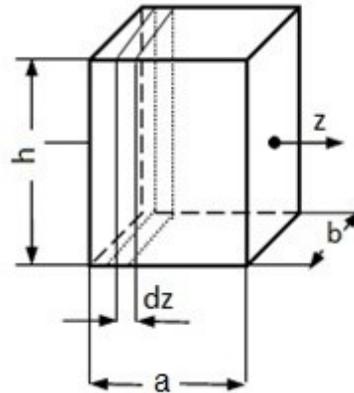
Momentos de inercia de volúmenes

Prisma rectangular recto

$$Si \left(\frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{12} \right)$$

es el momento de inercia polar centroidal de un rectángulo, entonces con relación al eje z , queda:

$$J_{z(V)} = \int_0^a \left(\frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{12} \right) dz = \frac{a \cdot b \cdot h}{12} (b^2 + h^2)$$



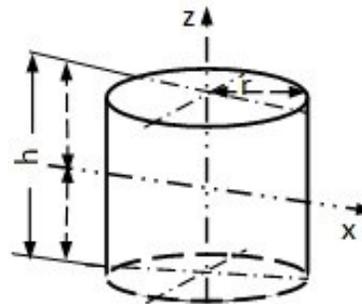
Cilindro circular recto

Con respecto al eje Z :

$$J_{z(V)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\pi r^4}{4} dz = \frac{\pi r^4 h}{2}$$

Con respecto al eje X :

$$J_{z(V)} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\pi r^4}{4} + \pi r^2 z^2 \right) dz = \frac{\pi r^2 h}{12} (3r^2 + h^2)$$



Momento de inercia de masa

Este momento, J , es el producto del momento de volumen $J_{(V)}$ por la densidad ρ :

$$J = J_{(V)} \rho \quad (kg \cdot m^2)$$

donde

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\gamma}{g} \quad (kg \cdot m^{-3})$$

Ejemplo: Para un cilindro $J = J_{(V)} \frac{m}{V} = \frac{\pi r^4 h}{2} \frac{m}{\pi r^2 h} = \frac{mr^2}{2}$

Constantes universales

Carga electrón y protón = 1.6×10^{-19} C

Masa electrón = 9.11×10^{-31} kg

Masa protón = 1.673×10^{-27} kg

$$k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}$$

Constante gravitacional

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$$

Constante dieléctrica = 8.85×10^{-12} F/m

Constante de permeabilidad = 1.26×10^{-6} H/m

Electrón-volt (eV) = 1.60×10^{-19} J

$$\rho_{Cu} = 1.69 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\rho_{Al} = 2.83 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\rho_{Ag} = 1.62 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\rho_{Fe} = 9.68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\delta_{Cu} = 8.93 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$\delta_{Al} = 2.7 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$\delta_{madera} = 0.6 - 0.9 \times 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$$

Equivalencias

$$1 \text{ N} = 0.2248 \text{ lb} = 10^5 \text{ dinas}$$

$$1 \text{ pulg} = 0.0254 \text{ m}$$

$$1 \text{ kCal} = 418 \text{ Joule}$$

$$1 \text{ Btu} = 0.252 \text{ KCal}$$

$$1 \text{ HPh} = 1.014 \text{ CVh}$$

$$1 \text{ Watt} = 0.860 \text{ KCal/h}$$

$$1 \text{ Joule} = 2.778 \times 10^{-7} \text{ kWh}$$

$$1 \text{ Joule} = 9.481 \times 10^{-4} \text{ Btu} = 10^7 \text{ erg}$$

$$1 \text{ Joule} = 0.2389 \text{ cal} = 6.242 \times 10^{18} \text{ eV}$$

$$1 \text{ HP} = 550 \frac{\text{ft}\cdot\text{lb}}{\text{s}} = 745.7 \text{ W}$$

$$1 \text{ HP} = 2545 \text{ Btu/h} = 178.1 \text{ cal/s}$$

$$1 \text{ Tesla} = 10000 \text{ Gauss}$$

$$1 \text{ milla} = 1609 \text{ m}$$

$$1 \text{ ft} = 30.48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ libra} = 454 \text{ gr}$$

Identidades Trigonometricas

$$\text{sen}(90 - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90 - \theta) = \text{sen} \theta$$

$$\text{Sen } 2\theta = 2 \text{ sen} \theta \cos \theta$$

$$\text{Sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \text{ sen} \beta$$

$$\text{Cos}(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \text{sen} \alpha \text{ sen} \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Análisis dimensional y teoría de semejanza

De las 4 dimensiones básicas: M = masa, L = longitud, T = tiempo, θ = temperatura
Se establece un sistema MLT θ ; algunos valores en la siguiente tabla.

Cantidad	Símbolo	MLT θ	FLT θ
Longitud	L	L	L
Área	A	L ²	L ²
Volumen	\mathcal{V}	L ³	L ³
Velocidad	V	LT ⁻¹	LT ⁻¹
Aceleración	dV/dt	LT ⁻²	LT ⁻²
Velocidad del sonido	a	LT ¹	LT ¹
Flujo volumétrico, caudal	Q	L ³ T ⁻¹	L ³ T ⁻¹
Flujo másico	\dot{r}	MT ⁻¹	FTL ⁻¹
Presión, esfuerzo	p, σ , τ	ML ⁻¹ T ⁻²	FL ⁻²
Velocidad de deformación	$\dot{\epsilon}$	T ¹	T ¹
Ángulo	θ	Ninguna	Ninguna
Velocidad angular	ω, Ω	T ⁻¹	T ⁻¹
Viscosidad	μ	ML ⁻¹ T ⁻¹	FTL ⁻²
Viscosidad cinemática	ν	L ² T ¹	L ² T ⁻¹
Tensión superficial	Υ	MT ⁻²	FL ⁻¹
Fuerza	F	MLT ⁻²	F
Momento par	M	ML ² T ²	FL
Potencia	P	ML ² T ⁻³	FLT ⁻¹
Trabajo, energía	W, E	ML ² T ⁻²	FL
Densidad	ρ	ML ⁻³	FT ² L ¹
Temperatura	T	θ	θ
Calor específico	c_p, c_v	L ² T ⁻² θ^{-1}	L ² T ⁻² θ^{-1}
Peso específico	ρg	ML ⁻² T ²	FL ⁻³
Conductividad térmica	K	MLT ⁻³ θ^{-1}	FT ⁻¹ θ^1
Coeficiente de expansión	β	θ^{-1}	θ^{-1}

Tablas características de los flip flops

Flip flop JK			
J	K	Q(t+1)	
0	0	Q(t)	Sin cambio
0	1	0	Restablecer
1	0	1	Establecer
1	1	Q'(t)	Complementar

Flip flop D		
D	Q(t+1)	
0	0	Restablecer
1	1	Establecer

Flip flop T		
T	Q(t+1)	
0	Q(t)	Sin Cambio
1	Q'(t)	Complementar

Ecuaciones características de los flip flops

$Q(t+1)=D$ Ecuación característica flip flop D

$Q(t+1)=JQ'+K'Q$ Ecuación característica flip flop JK

$Q(t+1)=T \text{ EXOR } Q = TQ'+T'Q$ Ecuación característica flip flop T

Tablas de excitación de los flip flops JK y T

Flip flop JK			
Q(t)	Q(t+1)	J	K
0	0	0	X
0	1	1	X
1	0	X	1
1	1	X	0

Flip flop T		
Q(t)	Q(t+1)	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

El símbolo X en las tablas representa una condición de indiferencia, es decir, que no importa si la entrada es 1 ó 0.

Consejo Técnico

Representantes de Instituciones de Educación Superior

M.C. David César Malpica Moreda
**Benemérita Universidad Autónoma de
Puebla**

Dr. Ángel Flores Abad
**Universidad Autónoma de Ciudad
Juárez**

Dra. Yamel Ungson Almeida
**Centro de Enseñanza Técnica y
Superior**

Dr. Eliezer Garza González
Universidad Autónoma de Nuevo León

Mtro. Miguel de Jesús Ramírez Cadena
Tecnológico de Monterrey

Dr. Jorge Aurelio Brizuela Mendoza
Universidad de Guadalajara

Mtra. Isabel Lascurain Gutiérrez
Universidad Anáhuac

Mtro. Irving Sánchez Lima
Universidad del Valle de México

Dr. Oscar Omar Ovalle Osuna
**Universidad Autónoma de Baja
California**

Mtro. Jorge Alonso Ramírez Márquez
**Universidad Politécnica de
Aguascalientes**

Dr. Jorge Luis Barahona Ávalos
**Universidad Tecnológica de La
Mixteca**

Dr. Ricardo Oscar Magos Pérez
Universidad Tecnológica de México

Este Formulario es un instrumento de apoyo para quienes sustentarán el Examen General para el Egreso de Ingeniería Mecatrónica (EGEL-IMECATRO) y está vigente a partir de enero de 2020.

El Formulario para el sustentante es un documento cuyo contenido está sujeto a revisiones periódicas. Las posibles modificaciones atienden a los aportes y críticas que hagan los miembros de las comunidades académicas de instituciones de educación superior de nuestro país, los usuarios y, fundamentalmente, las orientaciones del Consejo Técnico del examen.

El Ceneval y el Consejo Técnico del EGEL-IMECATRO agradecerán todos los comentarios que puedan enriquecer este material. Sírvase dirigirlos a:

Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C.

**Subdirección de Evaluación de Egreso
en Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Av. Camino al Desierto de los Leones (Altavista) 37,

Col. San Ángel, Álvaro Obregón,

C.P. 01000, Ciudad de México.

Tel: 55 53 22 92 00 ext. 5109

www.ceneval.edu.mx

nancy.rodriguez@ceneval.edu.mx

El Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior es una asociación civil sin fines de lucro constituida formalmente el 28 de abril de 1994, como consta en la escritura pública número 87036 pasada ante la fe del notario 49 del Distrito Federal.

Sus órganos de gobierno son la Asamblea General, el Consejo Directivo y la Dirección General. Su máxima autoridad es la Asamblea General, cuya integración se presenta a continuación, según el sector al que pertenecen los asociados:

Asociaciones e instituciones educativas: Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior, A.C.; Federación de Instituciones Mexicanas Particulares de Educación Superior, A.C.; Instituto Politécnico Nacional; Tecnológico de Monterrey; Universidad Autónoma del Estado de México; Universidad Autónoma de San Luis Potosí; Universidad Autónoma de Yucatán; Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla; Universidad Tecnológica de México.

Asociaciones y colegios de profesionales: Barra Mexicana Colegio de Abogados, A.C.; Colegio Nacional de Actuarios, A.C.; Colegio Nacional de Psicólogos, A.C.; Federación de Colegios y Asociación de Médicos Veterinarios y Zootecnistas de México, A.C.; Instituto Mexicano de Contadores Públicos, A.C.

Organizaciones productivas y sociales: Academia de Ingeniería, A.C.; Academia Mexicana de Ciencias, A.C.; Academia Nacional de Medicina, A.C.; Fundación ICA, A.C.

Autoridades educativas gubernamentales: Secretaría de Educación Pública.

El Centro está inscrito desde el 10 de marzo de 1995 en el Registro Nacional de Instituciones Científicas y Tecnológicas del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, con el número 506.

También es miembro en:

- el International Association for Educational Assessment
- la European Association of Institutional Research
- el Consortium for North American Higher Education Collaboration
- el Institutional Management for Higher Education de la OCDE



CENTRO NACIONAL
DE EVALUACIÓN PARA
LA EDUCACIÓN SUPERIOR, A.C.

CENEVAL®

Dirección de los EGEL

ENERO • 2021