

A grayscale background photograph showing a person's hands working on a complex mechanical assembly, possibly a robotic arm or a precision machine, with various tools and components visible.

# Formulario

Examen General para el Egreso  
de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica

## **EGEL Plus IMECATRO**

**Formulario**  
Examen General para el Egreso  
de la Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica  
**EGEL Plus IMECATRO**

## DIRECTORIO

**Antonio Ávila Díaz**  
Director General

**Alejandra Zúñiga Bohigas**  
Directora de los Exámenes  
Generales para el Egreso de la Licenciatura

**Wilson Jesús Pool Cibrián**  
Subdirector de Evaluación de Egreso en  
Diseño, Ingenierías y Arquitectura

**Nancy Rodríguez Huerta**  
Responsable del EGEL Plus Sección  
Disciplinar en Ingeniería Mecatrónica

## *Formulario*

D.R. © 2021  
Centro Nacional de Evaluación  
para la Educación Superior, A.C. (Ceneval)

Primera edición

# Contenido

<b>Diseño de sistemas mecatrónicos .....</b>	<b>5</b>
Cinemática.....	5
Movimiento en una dimensión .....	5
Dinámica .....	6
Esfuerzo normal, factor de seguridad y deformaciones.....	7
Razón de Poisson .....	7
Ley de Hooke generalizada.....	7
Esfuerzo cortante (cizalla) y deformación transversal.....	7
Esfuerzo cortante y deformación angular debidos a torsión.....	7
Relación entre potencia (HP) y par a la salida del motor (Nm).....	8
Esfuerzo normal y cortante axial en vigas .....	8
Esfuerzos principales ante una combinación de esfuerzos.....	8
Relación de velocidades .....	9
Resistencia en un conductor .....	9
Tablas características de los flip flops .....	11
Tablas de excitación de los flip flops JK y T.....	12
Transformada de Laplace .....	12
Tabla de transformadas de Laplace .....	12
Tabla de propiedades de la transformada de Laplace .....	13
Tipos de respuesta .....	14
Control clásico .....	18
Control moderno.....	20
Transformada Z .....	21
Tabla de transformada -Z .....	21
Tabla de propiedades de la transformada Z.....	22
<b>Implementación de sistemas mecatrónicos .....</b>	<b>25</b>
Configuraciones básicas de amplificadores operacionales.....	28
Puente de Wheatstone .....	29
<b>Integración de tecnologías para sistemas mecatrónicos .....</b>	<b>30</b>
Redes (diagrama PERT) .....	30
Toma de decisiones (árboles de decisión).....	30
Punto de equilibrio .....	30
Ingeniería económica .....	31
Rotación de inventarios .....	32
Análisis de la deuda .....	32
Análisis de la rentabilidad.....	32
Análisis de la liquidez.....	33
<b>Anexos .....</b>	<b>35</b>
Geometría .....	35
Sistemas de coordenadas.....	36
Vectores.....	37
Trigonometría.....	37
Medida de ángulos planos.....	37
Representación .....	37
Unidad de arco .....	38
Equivalencias. Por definición.....	38
Funciones trigonométricas.....	39
Operaciones con funciones trigonométricas .....	39
Ley de los senos.....	40
Ley de los coseños.....	40
Ley de las tangentes .....	40
Números complejos.....	40
Tablas de derivadas.....	41
Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas.....	41
Derivadas de las funciones trigonométricas y de las trigonométricas inversas .....	41

Reglas de integración.....	42
Electricidad y magnetismo .....	43
Constantes universales.....	45
Análisis dimensional y teoría de semejanza .....	47
<b>Consejo Técnico .....</b>	<b>48</b>



## Diseño de sistemas mecatrónicos

### Cinemática

$$F = xi + yj + zk$$

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\ddot{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n$$

$$\overset{\rightarrow}{v} = v\hat{u}_t$$

$$\overset{\rightarrow}{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

$$\overset{\rightarrow}{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u}_\theta$$

### Movimiento en una dimensión

$$x = vt$$

$$x = x_o + vt$$

$$v = \frac{1}{2}(v + v_0)$$

$$v = v_o + at$$

$$x = x_o + \frac{1}{2}(v_o + v)t$$

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$$



## Dinámica

$$\vec{F} = m\vec{a} = \left( \frac{W}{g} \right) \vec{a}$$

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

$$\sum F = m dV / dt$$

$$X_{B/A} = X_B - X_A$$

$$V_{B/A} = V_B - V_A$$

$$a_{B/A} = a_B - a_A$$

### Trabajo, energía y conservación de la energía

$$U = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$P = \frac{U}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{r}}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad P: \text{potencia}$$

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} \quad \eta: \text{eficiencia}$$

$$U = \Delta K = K_f - K_i$$

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \quad K: \text{energía cinética}$$

$$W = -\Delta V = V_f - V_i \quad V: \text{energía potencial}$$

$$V(y) = mgy$$

$$V_e = \frac{1}{2} kx^2$$

### Impulso e ímpetu

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt$$

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad p: \text{ímpetu}$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int \vec{F} dt \quad \Delta \vec{p}: \text{impulso}$$



## Esfuerzo normal, factor de seguridad y deformaciones

$$\sigma = \frac{F}{A}; \quad FS = \frac{\sigma_{Yp}}{\sigma_d}; \quad \epsilon = \frac{\delta}{L}; \quad \sigma = E\epsilon; \quad \delta = \frac{PL}{AE}$$

## Razón de Poisson

$$\nu = -\frac{\epsilon_{lat}}{\epsilon_{long}}$$

## Ley de Hooke generalizada

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

donde

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

## Esfuerzo cortante (cizalla) y deformación transversal

$$\tau = \frac{V}{A}; \quad \tau = G\gamma$$

## Esfuerzo cortante y deformación angular debidos a torsión

$$\tau = \frac{Tc}{J}; \quad \phi = \frac{TL}{JG};$$



### Momento polar de inercia sección circular maciza

$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$

### Momento polar de inercia sección circular hueca

$$J = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

### Potencia

$$P = T\omega; \quad \omega = 2\pi f$$

1 HP = 33 000 lb·ft/min (caballo de potencia)

1 CV = 736 W (caballo de vapor)

### Relación entre potencia (HP) y par a la salida del motor (Nm)

$$P_{HP} = \left( \frac{T\omega}{7025.9} \right)$$

$P_{HP}$  = potencia (*Horse Power*)

T = torsión (par) Nm

N = revoluciones por minuto (rpm)

$\omega$  = velocidad angular (rpm)

### Esfuerzo normal y cortante axial en vigas

$$\sigma = \frac{Mc}{I}; \quad \tau = \frac{VQ}{It}$$

### Esfuerzos principales ante una combinación de esfuerzos

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

### Esfuerzo cortante máximo

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



## Relación de velocidades

$$m_v = \frac{N_e}{N_s} = \frac{D_e}{D_s} = \frac{\omega_s}{\omega_e}$$

$m_v$  = relación de velocidades

$N_e$  = número de dientes en el elemento motriz de entrada

$N_s$  = número de dientes en el elemento motriz de salida

$D_e$  = diámetro de paso de entrada

$D_s$  = diámetro de paso de salida

$\omega_e$  = velocidad angular de entrada

$\omega_s$  = velocidad angular de salida

## Resistencia en un conductor

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

$R$  = resistencia ( $\Omega$ )

$\rho$  = resistividad del conductor  $\left( \frac{\Omega \cdot m^2}{m} \right)$

$L$  = longitud ( $m$ )

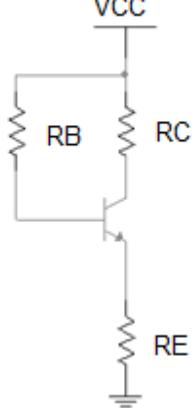
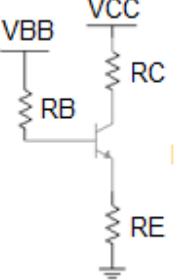
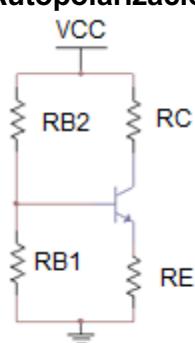
$A$  = área ( $m^2$ )

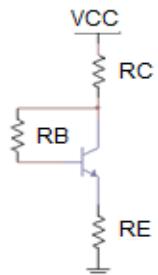
## Variación de la resistencia con la temperatura

$$R_2 = R [1 + \alpha(t_2 - t_1)]$$



## Circuitos de polarización de transistores bipolares

<b>Polarización de corriente de base</b> 	$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B + (1 + h_{FE})R_E}$ $I_C = h_{FE}I_B$ $V_{CE} = V_{CC} - I_C \left( R_C + \frac{1 + h_{FE}}{h_{FE}} \right) R_E$ <p>Si <math>I_B \ll I_C</math> (<math>h_{FE} \gg 1</math>)</p> $I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B + h_{FE}R_E}$ $V_{CE} = V_{CC} - I_C(R_C + R_E)$
<b>Polarización de tensión de base constante</b> 	$I_B = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B + (1 + h_{FE})R_E}$ $I_C = h_{FE}I_B$ $V_{CE} = V_{CC} - I_C \left( R_C + \frac{1 + h_{FE}}{h_{FE}} \right) R_E$
<b>Autopolarización</b> 	Idénticas fórmulas al caso anterior, siendo $R_B = R_{B1}    R_{B2} = \frac{R_{B1}R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}}$ $V_{BB} = \frac{R_{B1}}{R_{B1} + R_{B2}} V_{CC}$

<b>Polarización de colector base</b> 	$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B + (1 + h_{FE})(R_C + R_E)}$ $I_C = h_{FE}I_B$ $V_{CE} = I_B R_B V_{BE}$ <p>El transistor nunca entra en saturación</p>
---	--

### Tablas características de los flip flops

Flip flop JK			
J	K	Q(t+1)	
0	0	Q(t)	Sin cambio
0	1	0	Restablecer
1	0	1	Establecer
1	1	Q'(t)	Complementar

Flip flop D		
D	Q(t+1)	
0	0	Restablecer
1	1	Establecer

Flip flop T		
T	Q(t+1)	
0	Q(t)	Sin Cambio
1	Q'(t)	Complementar

### Ecuaciones características de los flip flops

$$Q(t+1) = D \quad \text{Ecuación característica flip flop D}$$

$$Q(t+1) = JQ' + K'Q \quad \text{Ecuación característica flip flop JK}$$

$$Q(t+1) = T \text{ EXOR } Q = TQ' + T'Q \quad \text{Ecuación característica flip flop T}$$



## Tablas de excitación de los flip flops JK y T

Flip flop JK			
Q(t)	Q(t+1)	J	K
0	0	0	X
0	1	1	X
1	0	X	1
1	1	X	0

Flip flop T		
Q(t)	Q(t+1)	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

El símbolo X en las tablas representa una condición de indiferencia, es decir, que no importa si la entrada es 1 ó 0.

## Transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

## Tabla de transformadas de Laplace

f(t)	F(s)
Impulso unitario $\delta(t)$	1
Escalón unitario $1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$

$f(t)$	$F(s)$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \phi)$ $\phi = \text{atan} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$

### Tabla de propiedades de la transformada de Laplace

Linealidad	$\mathcal{L}\{af(t) \pm bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} \pm b\mathcal{L}\{g(t)\}$
Diferenciación Real (caso general)	$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$
	$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$ Donde $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(t)$
Diferenciación con CI nulas	$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^nF(s)$
Integración Real (caso general)	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s} \left[ \int f(0)dt \right]$
	$\mathcal{L}\left\{\int \dots \int f(t)(dt)^n\right\} = \frac{1}{s^n}F(s) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} \left[ \int \dots \int f(0)(dt)^k \right]$
Integración con CI nulas	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}F(s)$
Traslación Real	$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$
Traslación Compleja	$\mathcal{L}\{f(t-a)1(t-a)\} = e^{-as}F(s); a \geq 0$



## Tipos de respuesta

Sistemas de primer orden:  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}$

Ubicación de polos:  $s = -\frac{1}{\tau}$

Ganancia estática:  $k = \frac{\text{amplitud de salida}}{\text{amplitud de entrada}} = \frac{y(t_f) - y(t_0)}{u(t_f) - u(t_0)}$

Tiempo de asentamiento (criterio al 2%):  $t_s = 4\tau$

Respuesta transitoria para diferentes señales típicas de entrada:

Nombre	$u(t)$	$y(t)$
Impulso	$A\delta(t)$	$\frac{KA}{\tau} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$
Escalón	$A$	$KA \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$
Rampa	$At$	$KA\tau \left( \frac{t}{\tau} - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$
Parábola	$\frac{1}{2}At^2$	$KA\tau^2 \left( \frac{t^2}{\tau^2} - \frac{t}{\tau} + 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

Sistemas de segundo orden:  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

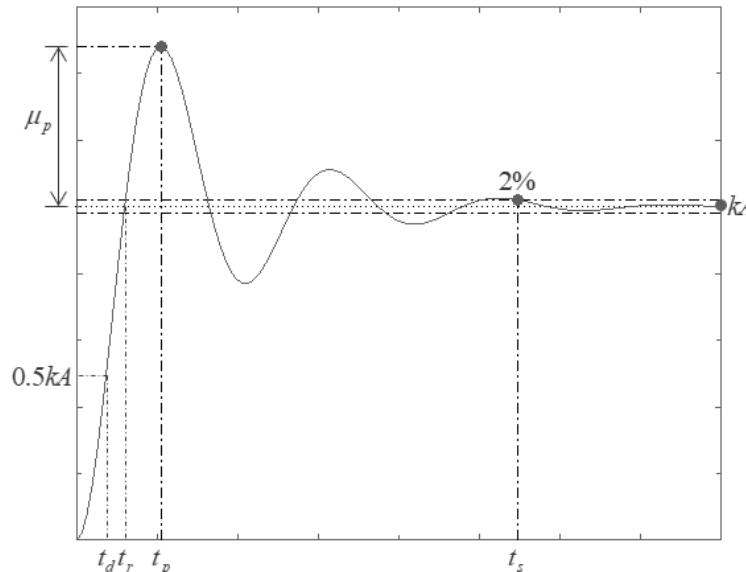
Ubicación de polos:

Para:	$s_{1,2} =$
$\xi > 1$	$-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$
$\xi = 1$	$-\xi\omega_n$
$0 < \xi < 1$	$-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$
$\xi = 0$	$\pm j\omega_n$



Características de la respuesta subamortiguada a una entrada escalón:

$$y(t) = kA \left[ 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} \sin\left(\omega_d t + \arctan \frac{\omega_d}{\sigma}\right) \right]$$



$$\text{Atenuación: } \sigma = \xi \omega_n$$

$$\text{Frecuencia natural amortiguada: } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\text{Sobreimpulso: } \% \mu_p = 100 e^{-\frac{\pi \sigma}{\omega_d}} = 100 e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

$$\text{Tiempo pico: } t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

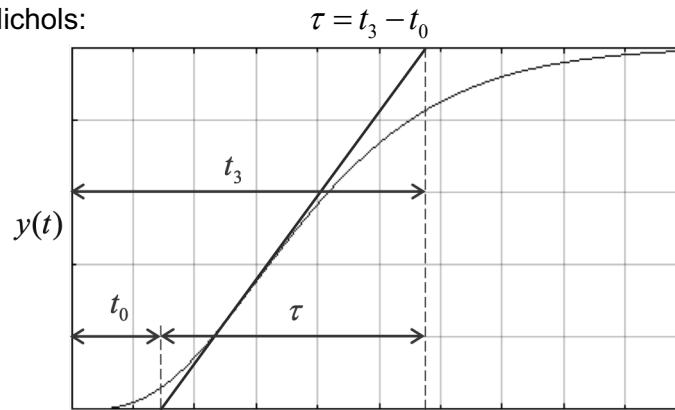
$$\text{Tiempo de asentamiento: } t_s = \frac{4}{\sigma}$$

$$\text{Tiempo de levantamiento: } t_p = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}; \quad \beta = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right)$$

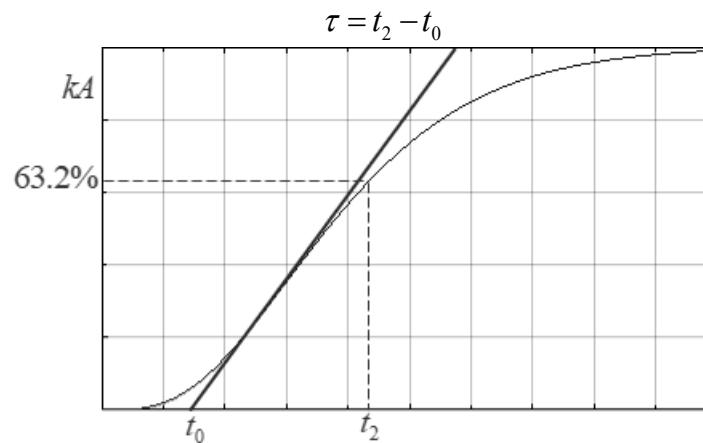


Aproximación de orden superior mediante primero orden más tiempo muerto:  $G(s) = \frac{k e^{-t_0 s}}{\tau s + 1}$

Método de Ziegler Nichols:



Método de Miller:

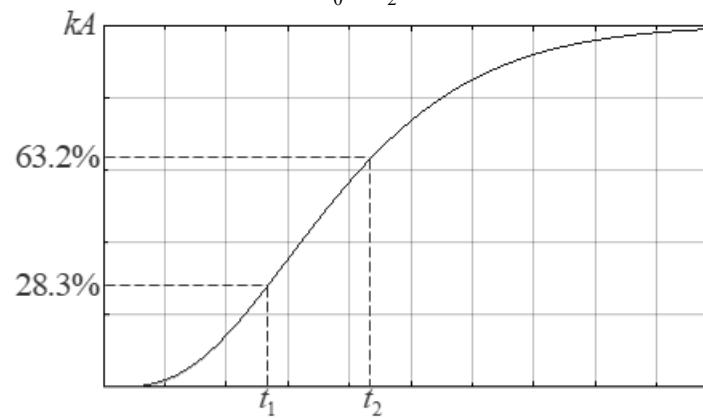


$$t_2 = t_0 + \tau$$

$$\tau = 1.5(t_2 - t_1)$$

$$t_0 = t_2 - \tau$$

Método de Smith:





Aproximación de Padé para la función de retardo:

Aproximación de primer orden:	Aproximación de segundo orden:
$e^{-t_0 s} \cong \frac{1 - \frac{t_0}{2}s}{1 + \frac{t_0}{2}s}$	$e^{-t_0 s} \cong \frac{1 - \frac{t_0}{2}s + \frac{t_0^2}{4}s^2}{1 + \frac{t_0}{2}s + \frac{t_0^2}{4}s^2}$

Error en estado estacionario:

$e_{ss}$	Entrada escalón $r(t) = A$	Entrada rampa $r(t) = At$	Entrada parábola $r(t) = \frac{A}{2}t^2$
Sistema tipo 0	$\frac{A}{1 + k_p}$	$\infty$	$\infty$
Sistema tipo 1	0	$\frac{A}{k_v}$	$\infty$
Sistema tipo 2	0	0	$\frac{A}{k_a}$

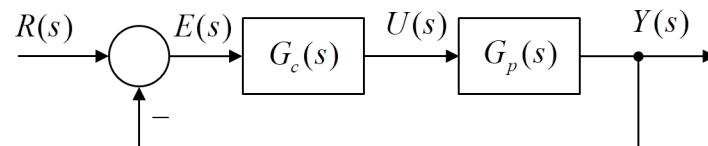
Donde:

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

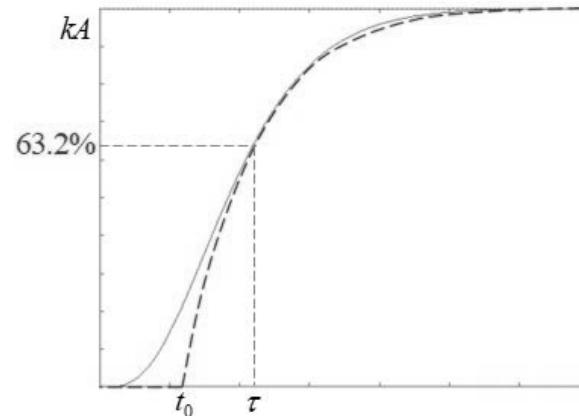
$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$

## Control clásico



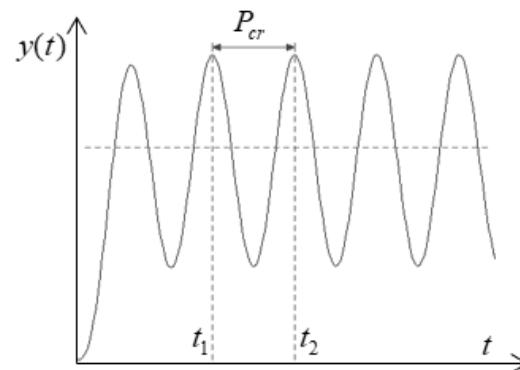
Planta $G_p(s)$	Control $G_c(s)$	Sintonización
$K$	I	$K_i = \frac{1}{\tau_c K}$
$\frac{K}{s}$	P	$K_c = \frac{1}{\tau_c K}$
$\frac{k}{\tau s + 1}$	PI	$K_c = \frac{(2\xi\omega_n\tau - 1)}{k}$ $K_i = \frac{\tau\omega_n^2}{k}$
$\frac{K}{s(s+a)}$	PD	$K_d = \frac{2\xi\omega_n - a}{K}$ $K_c = \frac{\omega_n^2}{K}$
$\frac{K}{(s+a_1)(s+a_2)}$	PID	$K_c = \frac{2\xi\omega_n\alpha + \omega_n^2 - a_1a_2}{K}$ $K_i = \frac{\alpha\omega_n^2}{K}$ $K_d = \frac{\alpha + 2\xi\omega_n - a_1 - a_2}{K}$

### Sintonización por Ziegler – Nichols de lazo abierto



Algoritmo	$K_c$	$\tau_i$	$\tau_d$
PI	$\frac{0.9\tau}{Kt_0}$	$3.33t_0$	---
PID	$\frac{1.2\tau}{Kt_0}$	$2t_0$	$\frac{t_0}{2}$

### Sintonización por Ziegler – Nichols de lazo cerrado



$$P_u = \frac{2\pi}{\omega_u}$$

Algoritmo	$K_c$	$\tau_i$	$\tau_d$
PI	$\frac{K_u}{2.2}$	$\frac{P_u}{1.2}$	---
PID	$\frac{K_u}{1.7}$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{8}$

Análisis en frecuencia:

$$G(j\omega) = M e^{j\phi}$$

$$M = |G(j\omega)| = \frac{B}{A}$$

$$e^{j\phi} = \angle G(j\omega) = \arctan \left[ \frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}} \right]$$

$$u(t) = A \sin \omega t$$

Magnitud en decibeles:

$$M_{dB} = 20 \log M = 20 \log |G(j\omega)|$$

Estabilidad relativa:

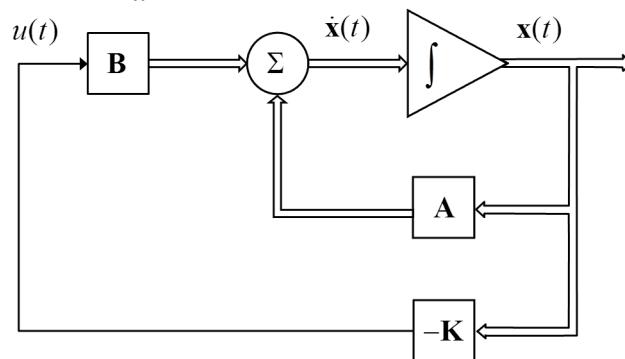
$$M_f = 180 + \phi = 180 + \angle G(j\omega_l)$$

$$M_g = \left| \frac{1}{G(j\omega_\pi)} \right|$$

$$M_g [dB] = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{G(j\omega_\pi)} \right| = -20 \log_{10} |G(j\omega_\pi)|$$

## Control moderno

Regulador por retro de estados:  $u = -Kx$



## Controlabilidad

$$\mathbf{M}_C = \left[ \mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right]$$

Fórmula de Ackerman:

$$\mathbf{K} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1] [\mathbf{M}_C]^{-1} p_d(\mathbf{A})$$

## Transformada Z

$$X(z) = Z\{x(t)\} = Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

### Tabla de transformada -Z

$F(s)$	$f(t)$	$f(kT) \circ f(k)$	$F(z)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$1(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$e^{-akT}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	$kT$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$\frac{2}{s^3}$	$t^2$	$(kT)^2$	$\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$e^{-akT} - e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT} - e^{-bT})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$te^{-at}$	$kTe^{-akT}$	$\frac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^2}$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{(\sin \omega T)z^{-1}}{1-(2 \cos \omega T)z^{-1}+z^{-2}}$



$F(s)$	$f(t)$	$f(kT) \circ f(k)$	$F(z)$
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{1 - (\cos \omega T)z^{-1}}{1 - (2 \cos \omega T)z^{-1} + z^{-2}}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$e^{-akT} \sin \omega kT$	$\frac{e^{-aT} (\sin \omega T)z^{-1}}{1 - (2e^{-aT} \cos \omega T)z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$e^{-akT} \cos \omega kT$	$\frac{1 - e^{-aT} (\cos \omega T)z^{-1}}{1 - (2e^{-aT} \cos \omega T)z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$

### Tabla de propiedades de la transformada Z

Linealidad	$Z\{f_k\} = \alpha Z\{f_k\} + \beta Z\{g_k\} = \alpha F(z) + \beta G(z)$
Multiplicación por $a^k$	$Z\{a^k x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k (a^{-1}z)^{-k} = X(a^{-1}z)$
Teorema de corrimiento (Traslación real)	$Z\{f(t-nT)\} = z^{-n} F(z)$
	$Z\{f(t+nT)\} = z^n \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right]$
Traslación compleja	$Z\{e^{-at} f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) (ze^{aT})^{-k} = F(ze^{aT})$
Teorema del valor inicial	$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
Teorema del valor final	$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1-z^{-1}) F(z) \right]$

## Equivalencia de elementos de sistemas dinámicos

Tipo de sistema	Mecánico traslacional	Mecánico rotacional	Eléctrico	Flujo	Térmico
Variable tipo A	Velocidad, $v$	Velocidad, $\Omega$	Voltaje, $e$	Presión, $P$	Temperatura, $T$
Elemento tipo A	Masa, $m$	Momento de inercia, $J$	Capacitor, $C$	Flujo del capacitor, $C_f$	Capacitor térmico, $C_h$
Ecuaciones elementales	$F = m \frac{dv}{dt}$	$T = J \frac{d\Omega}{dt}$	$i = C \frac{de}{dt}$	$Q_f = C_f \frac{dP}{dt}$	$Q_h = C_h \frac{dT}{dt}$
Energía almacenada	Cinética	Cinética	Campo eléctrico	Potencial	Térmica
Ecuaciones de energía	$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$	$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J\Omega^2$	$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}Ce^2$	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}C_fP^2$	$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2}C_hT^2$
Variable tipo T	Fuerza, $F$	Torque, $T$	Corriente, $i$	Tasa de flujo, $Q_f$	Flujo de calor, $Q_h$
Elemento tipo T	Esfuerzo, $1/k$	Esfuerzo, $1/k$	Inductor, L	Tensor de inercia, I	Ninguno
Ecuaciones elementales	$v = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$\Omega = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt}$	$e = L \frac{di}{dt}$	$P = I \frac{dQ_f}{dt}$	Ninguno
Energía almacenada	Potencial	Potencial	Campo magnético	Cinética	Ninguna
Ecuaciones de energía	$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2k}F^2$	$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2k}T^2$	$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$	$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}IQ_f^2$	Ninguna
Elemento tipo D	Amortiguador, $b$	Amortiguador rotacional, $B$	Resistor, R	Resistencia al flujo, $R_f$	Resistor térmico, $R_h$
Ecuaciones elementales	$F = bv$	$T = B\Omega$	$i = \frac{1}{R}e$	$Q_f = \frac{1}{R_f}P$	$Q_h = \frac{1}{R_h}T$
Energía disipada	$\begin{aligned} \frac{dE_D}{dt} &= Fv & \frac{dE_D}{dt} &= T\Omega & \frac{dE_D}{dt} &= ie & \frac{dE_D}{dt} &= Q_f P \\ &= \frac{1}{b}F^2 & &= \frac{1}{B}T^2 & &= R i^2 & &= R_f Q_f^2 & \frac{dE_D}{dt} = Q_h \\ &= bv^2 & &= B\Omega^2 & &= \frac{1}{R}e^2 & &= \frac{1}{R_f}P^2 \end{aligned}$				



## Criterio de estabilidad de Routh – Hurwitz

Ecuación característica:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$\cdots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\cdots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$s^2$	$e_1$	$e_2$		
$s^1$	$f_1$			
$s^0$	$g_1$			

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}; \quad \cdots \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}; \quad \cdots$$

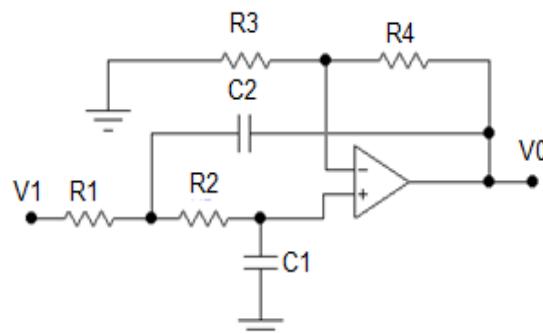


## Implementación de sistemas mecatrónicos

### Filtros activos

<p><b>Filtro pasa bajas de primer orden</b></p>	$K = 1 + \frac{R_3}{R_2}$ $R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ $R_2 = \frac{K}{K - 1} R_1$ $R_3 = K R_1$
<p><b>Filtro pasa bajas de segundo orden (MFB)</b></p>	$K = \frac{R_2}{R_1}$ $R_1 = \frac{R_2}{K}$ $R_2 = \frac{2(K+1)}{\left[aC_2 + (a^2C_2^2 - 4bC_1C_2(K+1))^{\frac{1}{2}}\right]\omega_c}$ $R_3 = \frac{1}{bC_1C_2\omega_c^2R_2}$

### Filtro pasa bajas de segundo orden



$$K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

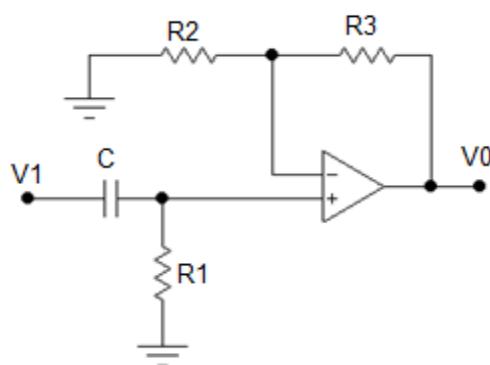
$$R_1 = \frac{1}{[aC_2 + ([a^2 + 4b(K+1)]C_2^2 - 4bC_1C_2)^{\frac{1}{2}}] \omega_c}$$

$$R_2 = \frac{1}{bC_1C_2R_1\omega_c^2}$$

$$R_3 = \frac{K(R_1 + R_2)}{K - 1}; K > 1$$

$$R_4 = K(R_1 + R_2)$$

### Filtro pasa altas de primer orden



$$K = 1 + \frac{R_3}{R_2}$$

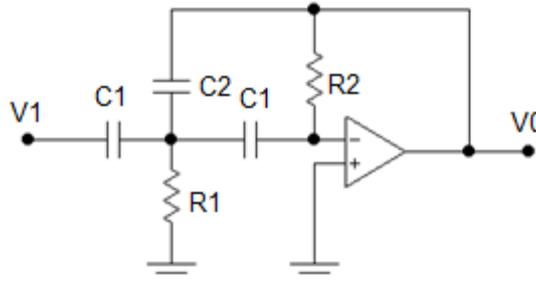
$$R_1 = \frac{1}{\omega_c C}$$

$$R_2 = \frac{K}{K - 1} R_1; K > 1$$

$$R_3 = KR_1$$

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

### Filtro pasa altas de segundo orden (MFB)



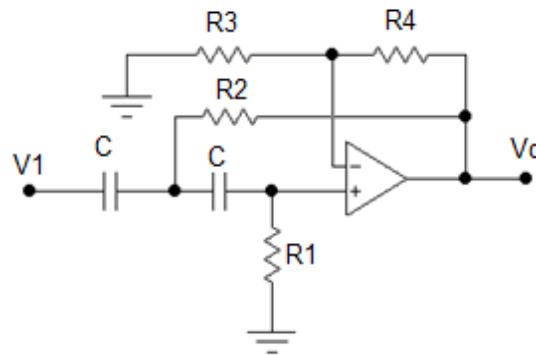
$$K = \frac{C_1}{C_2}$$

$$R_1 = \frac{1}{(2C_1 + C_2)\omega_0}$$

$$R_2 = \frac{(2C_1 + C_2)b}{aC_1C_2\omega_0}$$

$$C_1 = \frac{10}{f_c}$$

Filtro pasa altas de segundo orden (VCVS)



$$K = 1 + \frac{R_4}{R_3}$$

$$R_1 = \frac{4b}{[a + (a^2 + 8b(K+1))^{\frac{1}{2}}] \omega_c C}$$

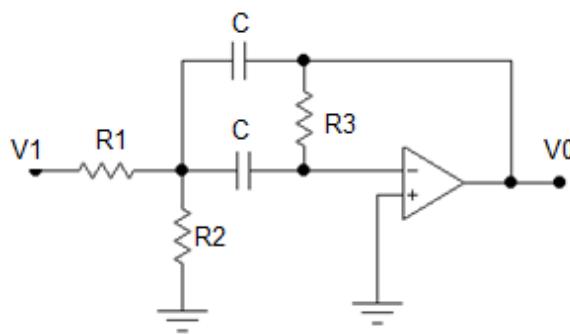
$$R_2 = \frac{b}{C^2 R_1 \omega_c^2}$$

$$R_3 = \frac{KR_1}{K-1}; K > 1$$

$$R_4 = KR_1$$

$$C_1 = \frac{10}{f_c}$$

Filtros pasa banda (MFB)



$$K < 2Q_0^2$$

$$R_1 = \frac{Q_0}{\omega_0 C K}$$

$$R_2 = \frac{Q_0}{\omega_0 C (2Q_0^2 - K)}$$

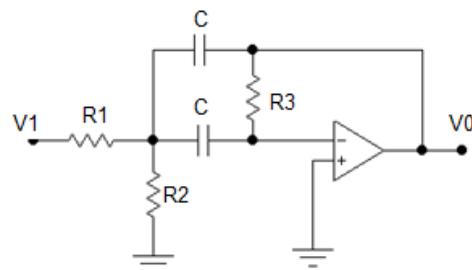
$$R_3 = \frac{2Q_0}{\omega_0 C}$$

$$K = \frac{R_3}{2R_1}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_{cs} - \omega_{ci}} = \frac{f_0}{f_{cs} - f_{ci}} = \frac{f_0}{B\omega}$$

$$f_0 = (f_{ci}f_{cs})^{\frac{1}{2}}$$

### Filtros rechazo de banda



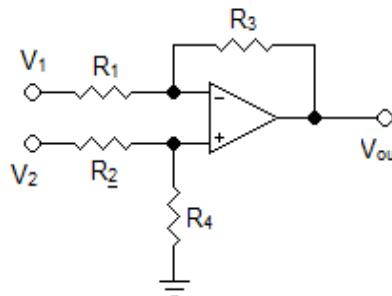
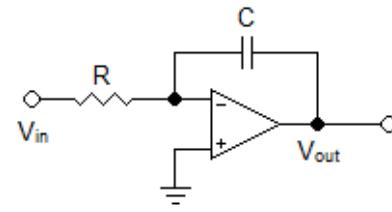
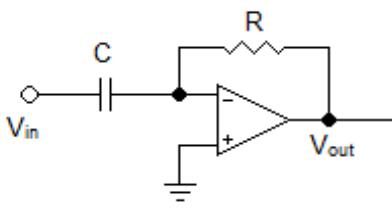
$$R_1 = \frac{1}{2Q_0\omega_0 C}$$

$$R_2 = \frac{2Q_0}{\omega_0 C}$$

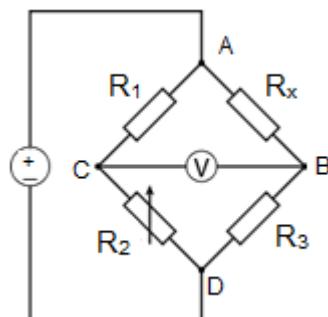
$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

### Configuraciones básicas de amplificadores operacionales

Configuración	Diagrama	Relación entrada-salida
Seguidor		$V_{out} = V_{in}$
Inversor		$V_{out} = -V_{in} \frac{R_f}{R_{in}}$
No inversor		$V_{out} = V_{in} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$
Sumador inversor		$V_{out} = -R_f \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_n}{R_n}\right)$

Configuración	Diagrama	Relación entrada-salida
Restador		$V_{out} = V_2 \left( \frac{(R_3 + R_1)R_4}{(R_4 + R_2)R_1} \right) - V_1 \left( \frac{R_3}{R_1} \right)$
Integrador		$V_{out} = - \int_0^t \frac{V_{in}}{RC} dt + V_{inicial}$
Derivador		$V_{out} = -RC \frac{dV_{in}}{dt}$

### Puente de Wheatstone



En condición de equilibrio, se cumple que:  $R_x = \frac{R_1 R_3}{R_2}$



## Integración de tecnologías para sistemas mecatrónicos

### Redes (diagrama PERT)

$$d_{ij} = \frac{(a + 4m + b)}{6}$$

$d_{ij}$  = duración de la actividad

a = duración optimista

m = duración más probable

b = duración pesimista

Tiempo más temprano  $t_j$

$$t_j = \max(t_i + d_{ij})$$

Tiempo más tardío  $T_j$

$$T_j = \min(T_i + d_{ij})$$

j = suceso cuya fecha hay que calcular

i = etapas origen de actividades que llegan a él

### Toma de decisiones (árboles de decisión)

$$VE(d_i) = \sum_{j=1}^N (P(s_j) \cdot V_{ij})$$

VE = valor esperado de la alternativa de decisión

$d_i$  = alternativa de decisión

$P(s_j)$  = probabilidad del estado de la naturaleza  $s_j$

$V_{ij}$  = resultado correspondiente a la alternativa de decisión  $d_i$  y el estado de la naturaleza  $s_j$

N = número de estados de la naturaleza

### Punto de equilibrio

$$\text{punto de equilibrio} = \frac{CF}{1 - \frac{CV}{P \times Q}}$$

CF = costos fijos totales

CV = costos variables totales

P = precio del producto

Q = cantidad de productos vendidos



## Ingeniería económica

*Tasa de interés anual efectivo*

$$i = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$$

*Encontrar un presente dado un futuro*

$$P = F \cdot \left[ \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

*Encontrar un futuro dado un presente*

$$F = P \cdot (1+i)^n$$

*Encontrar un presente dada una anualidad*

$$P = A \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

*Encontrar una anualidad dado un presente*

$$A = P \cdot \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

*Encontrar una anualidad dado un futuro*

$$A = F \cdot \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

*Encontrar un futuro dada una anualidad*

$$F = A \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

*Encontrar un presente dado un gradiente*

$$P = \frac{G}{i} \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

*Encontrar un futuro dado un gradiente*

$$F = \frac{G}{i} \cdot \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

*Encontrar una anualidad dado un gradiente*

$$A = G \cdot \left[ \frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right]$$



### Relación costo-beneficio

$$B / C = \frac{\text{ingreso} - \text{egresos}}{\text{costos}}$$

### Depreciación

$$D_t = \frac{B - VS}{n}$$

D<sub>t</sub> = cargo por depreciación anual

B = costo inicial o base no ajustada

VS = valor de salvamento

n = vida depreciable esperada o periodo de recuperación

### Rotación de inventarios

$$\text{Rotación de inventarios} = \frac{\text{Costo de ventas}}{\text{Inventario}}$$

### Rotación de los activos totales

$$\text{Rotación de activos totales} = \frac{\text{Ventas}}{\text{Activos totales}}$$

### Análisis de la deuda

#### Razón de deuda

$$\text{Razón de deuda} = \frac{\text{Pasivos totales}}{\text{Activos totales}}$$

#### Razón de la capacidad de pago de intereses

$$\text{Razón de la capacidad de pago de intereses} = \frac{\text{Utilidad antes de intereses e impuestos}}{\text{Intereses}}$$

### Análisis de la rentabilidad

#### Margen de utilidad bruta

$$\text{Margen de utilidad bruta} = \frac{\text{Ventas}-\text{costo de ventas}}{\text{Ventas}} = \frac{\text{Utilidad bruta}}{\text{Ventas}}$$

#### Margen de utilidad operativa

$$\text{Margen de utilidad neta} = \frac{\text{Utilidad neta después de impuestos}}{\text{Ventas}}$$



### Rendimiento sobre los activos

$$\text{Rendimiento sobre los activos} = \frac{\text{Utilidad neta después de impuestos}}{\text{Activos totales}}$$

### Rendimiento sobre el capital contable

$$\text{Rendimiento sobre el capital contable} = \frac{\text{Utilidad neta después de impuestos}}{\text{Capital contable}}$$

### Análisis de la liquidez

#### Capital de trabajo neto

$$\text{Capital de trabajo neto} = \text{activo circulante-pasivo circulante}$$

#### Razón circulante

$$\text{Razón circulante} = \frac{\text{Activo circulante}}{\text{Pasivo circulante}}$$

#### Razón rápida (prueba del ácido)

$$\text{Razón rápida} = \frac{\text{Activo circulante-inventario}}{\text{Pasivo circulante}}$$

#### Valor actual neto

$$VAN = \sum_{t=1}^n \frac{V_t}{(1+k)^t} - I_0$$

donde:

$V_t$  = flujos de caja de cada periodo  $t$

$I_0$  = inversión inicial

$n$  = número de periodos

$k$  = tipo de interés

#### Amortización

$$\text{Valor actual : } \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\text{Valor futuro: } \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Donde:

$i$  = la tasa de interés

$n$  = el número de periodos



Para el cálculo de la amortización de capital se usa la siguiente fórmula:

$$A = \frac{m \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

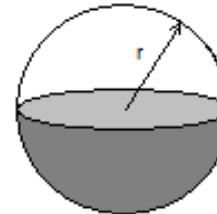
m = saldo al final del periodo

## Anexos

### Geometría

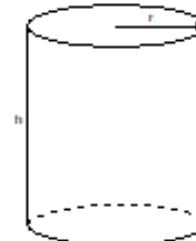
$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{Área de la superficie} = 4\pi r^2$$



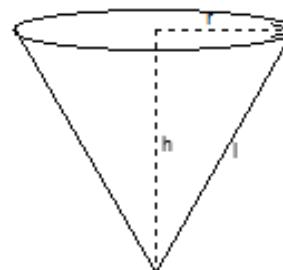
$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

$$\text{Área de la superficie lateral} = 2\pi r h$$



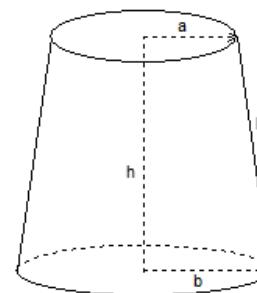
$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{Área de la superficie lateral} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r l$$



$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \pi h(a^2 + ab + b^2)$$

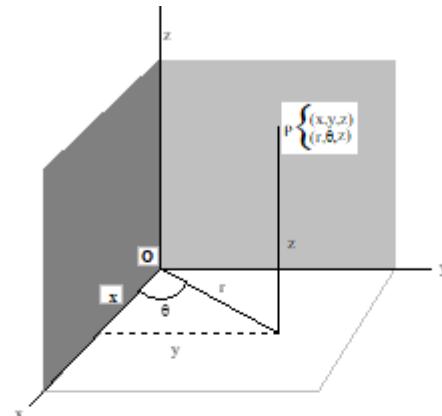
$$\begin{aligned}\text{Área de la superficie lateral} &= \pi(a+b)\sqrt{h^2+(b-a)^2} \\ &= \pi(a+b)l\end{aligned}$$



## Sistemas de coordenadas

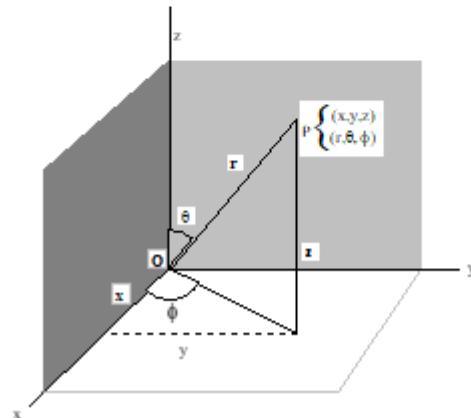
Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$



Coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$



Ángulo entre dos rectas en el plano  $\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$



## Vectores

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \|A\| \|B\| \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$\text{donde } \mathbf{A} = A_1 \hat{\mathbf{i}} + A_2 \hat{\mathbf{j}} + A_3 \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{B} = B_1 \hat{\mathbf{i}} + B_2 \hat{\mathbf{j}} + B_3 \hat{\mathbf{k}}$$

Son resultados fundamentales:

$$\begin{aligned} \text{Producto cruz: } \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= (A_2 B_3 - A_3 B_2) \hat{\mathbf{i}} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \hat{\mathbf{j}} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Magnitud del producto cruz  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \sin \theta$

El operador *nabla* se define así:

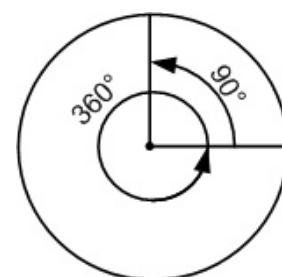
$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}$$

## Trigonometría

### Medida de ángulos planos

#### Representación

La medida de un ángulo puede expresarse en unidades comunes (grados) o en unidades de arco (radianes). Se representa a veces, respectivamente, por  $\alpha$  y  $\hat{\alpha}$ .



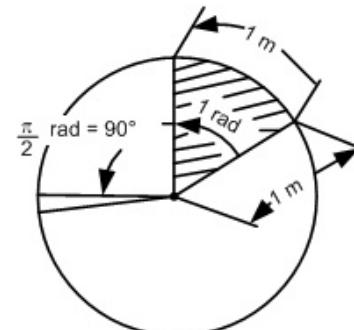
Unidades comunes (sexagesimales): grado ( $^{\circ}$ ), minuto ( $'$ ), segundo ( $''$ ).

$$\text{el } 1^{\circ} = 60'; 1' = 60''$$

### Unidad de arco

1 radián (rad) es el ángulo central de una circunferencia de radio unitario que intercepta un arco también unitario. Por lo tanto,

$$1 \text{ rad} = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1 \text{ (número adimensional)}$$



Con frecuencia no se indica específicamente la unidad, como en la siguiente tabla.

$\alpha$	$0^{\circ}$	$30^{\circ}$	$45^{\circ}$	$60^{\circ}$	$75^{\circ}$	$90^{\circ}$	$180^{\circ}$	$270^{\circ}$	$360^{\circ}$
$\hat{\alpha}$	0	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$5\pi / 12$	$\pi / 2$	$\pi$	$3\pi / 2$	$2\pi$
	0	0.52	0.78	1.05	1.31	1.57	3.14	4.71	6.28

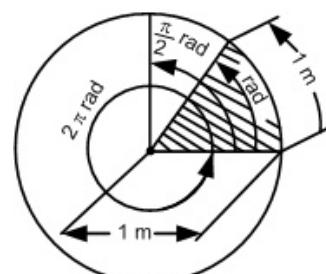
### Equivalencias. Por definición

$$360^{\circ} = 2\pi \text{ rad}, \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = 57.2967^{\circ}$$

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ rad} = 0.017453 \text{ rad}$$

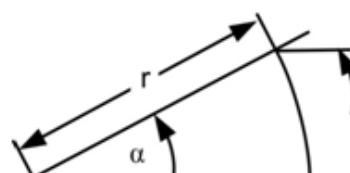
$$\hat{\alpha} = \frac{\pi}{180} \alpha = \frac{\alpha}{57.2967}$$

$$\hat{\alpha} = \text{arc } \alpha = \frac{\text{longitud de arco}}{\text{radio}}$$



La longitud de un arco ( $b$ ) es el producto del radio  $r$  y el ángulo central  $\hat{\alpha}$  (en radianes) de la circunferencia:

$$b = r\hat{\alpha}$$



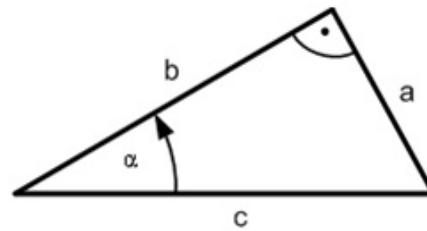
## Funciones trigonométricas

En un triángulo rectángulo:

$$\sen \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c};$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c};$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b};$$



### Operaciones con funciones trigonométricas

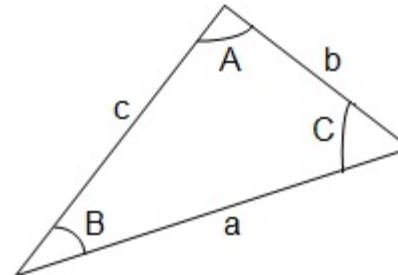
$\sen^2 A + \cos^2 A = 1$	$\sen^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 A$
$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$	$\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 A$
$\csc^2 A - \cot^2 A = 1$	$\sen^2 A = 2 \sen A \cos A$
$\tan A = \frac{\sen A}{\cos A}$	$\cos^2 A = \cos^2 A - \sen^2 A$
$\cot A = \frac{\cos A}{\sen A}$	$\sen(A \pm B) = \sen A \cos B \pm \cos A \sen B$
$\sen A \csc A = 1$	$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sen A \sen B$
$\cos A \sec A = 1$	$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
$\tan A \cot A = 1$	$\sen \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$
$\sen(-A) = -\sen A$	$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$
$\cos(-A) = \cos A$	$\sen A \sen B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$
$\tan(-A) = -\tan A$	$\sen A \cos B = \frac{1}{2} [\sen(A - B) + \sen(A + B)]$
	$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

Las leyes siguientes son válidas para cualquier triángulo plano ABC de lados a, b, c y de ángulos A, B, C.



### Ley de los senos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



### Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar**

### Ley de las tangentes

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$$

**Los otros lados y ángulos están relacionados en forma similar**

## Números complejos

### Forma trigonométrica o polar de un número complejo

Se tiene que  $r = |z| = |(x, y)|$  y que  $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Luego:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \sin \theta \\ \cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$z = (x, y) = x + yi = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

### Forma exponencial de un número complejo

Sea  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  un número complejo donde  $r$  es su módulo y  $\theta$  su argumento. Entonces, mediante el empleo de la fórmula de Euler, se obtiene:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$$



## Tablas de derivadas

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(cx) = c$
$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \dots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \dots$
$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(uvw) = uv \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) - u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v^2}$
$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$
$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dx}$ (Regla de la cadena)	

## Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas

$\frac{d}{dx}u^v = \frac{d}{dx}e^{v \ln u} = e^{v \ln u} \frac{d}{dx}[v \ln u] = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\log_a e}{u} \frac{du}{dx} \quad a > 0, \quad a \neq 1$
$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{d}{dx} \log_e u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$	

## Derivadas de las funciones trigonométricas y de las trigonométricas inversas

$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} u = \cos u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cos u = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad [0 < \cos^{-1} u < \pi]$	$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad [-\frac{\pi}{2} < \operatorname{sen}^{-1} u < \frac{\pi}{2}]$
$\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad [-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} u < \frac{\pi}{2}]$	$\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \quad [0 < \cot^{-1} u < \pi]$

$\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\begin{cases} +si & 0 < \sec^{-1} u < \frac{\pi}{2} \\ -si & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1} u < \pi \end{cases}$	$\frac{d}{dx} \csc^{-1} u = \frac{-1}{ u \sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} = \frac{\mp 1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx},$ $\begin{cases} -si & 0 < \csc^{-1} u < \frac{\pi}{2} \\ +si & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1} u < 0 \end{cases}$
--	--

## Reglas de integración

### Formas fundamentales

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int e^u \, du = e^u + C$$

$$\int u^n \, du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

### Formas trigonométricas

$\int \sin u \, du = -\cos u + C$	$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$
$\int \cos u \, du = \sin u + C$	$\int \tan u \, du = \ln \sec u  + C$
$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$	$\int \cot u \, du = \ln \sin u  + C$
$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$	$\int \sec u \, du = \ln \sec u + \tan u  + C$
$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$	$\int \csc u \, du = \ln \csc u - \cot u  + C$



## Electricidad y magnetismo

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$|\vec{F}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$\Phi_E$ : flujo eléctrico

$$V = k \frac{q}{r}$$

$V$ : potencial electrostático

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q} = -\frac{W_{ab}}{q} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$U$ : energía potencial electrostática

### Capacitancia

$$q = CV$$

$C$ : capacitancia

$$C = \kappa\epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Capacitor de placas paralelas

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

$\epsilon = k \epsilon_0$        $k$ : constante dieléctrica

$$C = \kappa\epsilon_0 \frac{2\pi l}{\ln(b/a)}$$

Capacitor cilíndrico

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

$U$ : energía almacenada en un capacitor

$$u = \frac{1}{2}\kappa\epsilon_0 E^2$$

$u$ : densidad de energía

### Corriente, resistencia y fuerza electromagnética

$$i = \frac{q}{t}$$

$i$ : corriente eléctrica

$$i = n q v A$$

$$j = \frac{i}{A} = \sum_i n_i q_i v_i$$

$j$ : densidad de corriente

$A$ : área

$$\rho = \frac{E}{j}$$

$\rho$  : resistividad

$$R = \frac{V}{i} = \rho \frac{l}{A}$$

$R$ : resistencia

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta t)$$

Variación de  $R$  con la temperatura

$$V_{ab} = \sum IR - \sum \varepsilon$$

$$\sum i_{ent.} = \sum i_{sal.}$$

$$\sum \text{Elev. de potencial} = \sum \text{caídas de potencial} \quad \sum v_i = 0$$

$$P = iV = i^2R = \frac{V^2}{R}$$

$P$ : potencia eléctrica

## Magnetismo

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$\vec{v}$  : velocidad

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$$

$\vec{B}$  : campo magnético

$$\tau = NiAB \sin \theta$$

$\vec{l}$  : elemento de longitud

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o i$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$B = \frac{\mu_o i}{2\pi r}$$

$r$ : distancia

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 a}$$

$$B = \frac{\mu_o Ni}{2\pi r}$$

$N$ : número de vueltas

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta \, d\theta$$

$r$ : radio

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$\varepsilon$  : fuerza electromagnética

$$\varepsilon = -vBl$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$



## Constantes universales

Carga electrón y protón =  $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Masa electrón =  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Masa protón =  $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$

$k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}$

Constante gravitacional

$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$

Constante dieléctrica =  $8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

Constante de permeabilidad =  $1.26 \times 10^{-6} \text{ H/m}$

Electrón-volt (eV) =  $1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$

$\rho_{Cu} = 1.69 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

$\rho_{Al} = 2.83 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

$\rho_{Ag} = 1.62 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

$\rho_{Fe} = 9.68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$

$\delta_{Cu} = 8.93 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$\delta_{Al} = 2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

$\delta_{madera} = 0.6 - 0.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

## Equivalencias

1 N = 0.2248 lb =  $10^5$  dinas

1 pulg = 0.0254 m

1 kCal = 418 Joule

1 Btu = 0.252 KCal

1 HPh = 1.014 CVh

1 Watt = 0.860  $\text{KCal}/\text{h}$

1 Joule =  $2.778 \times 10^{-7}$  kWh

1 Joule =  $9.481 \times 10^{-4}$  Btu =  $10^7$  erg

1 Joule = 0.2389 cal =  $6.242 \times 10^{18}$  eV

1 HP =  $550 \text{ ft.lb/s}$  = 745.7 W

1 HP = 2545 Btu/h = 178.1 cal/s

1 Tesla = 10000 Gauss

1 milla = 1609 m

1 ft = 30.48 cm

1 libra = 454 gr



### Identidades Trigonometricas

$$\sin(90 - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90 - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$



## Análisis dimensional y teoría de semejanza

De las cuatro dimensiones básicas:  $M$  = masa,  $L$  = longitud,  $T$  = tiempo,  $\theta$  = temperatura  
Se establece un sistema  $MLT\theta$ ; algunos valores en la siguiente tabla.

Cantidad	Símbolo	$MLT\theta$	$FLT\theta$
Longitud	$L$	$L$	$L$
Área	$A$	$L^2$	$L^2$
Volumen	$V$	$L^3$	$L^3$
Velocidad	$V$	$LT^{-1}$	$LT^{-1}$
Aceleración	$dV/dt$	$LT^{-2}$	$LT^{-2}$
Velocidad del sonido	$a$	$LT^1$	$LT^1$
Flujo volumétrico, caudal	$Q$	$L^3T^{-1}$	$L^3T^{-1}$
Flujo másico	$\dot{m}$	$MT^{-1}$	$FTL^{-1}$
Presión, esfuerzo	$p, \sigma, \tau$	$ML^{-1}T^{-2}$	$FL^{-2}$
Velocidad de deformación	$\dot{\epsilon}$	$T^1$	$T^1$
Ángulo	$\theta$	Ninguna	Ninguna
Velocidad angular	$\omega, \Omega$	$T^{-1}$	$T^{-1}$
Viscosidad	$\mu$	$ML^{-1}T^{-1}$	$FTL^{-2}$
Viscosidad cinemática	$\nu$	$L^2T^1$	$L^2T^{-1}$
Tensión superficial	$\gamma$	$MT^{-2}$	$FL^{-1}$
Fuerza	$F$	$MLT^{-2}$	$F$
Momento par	$M$	$ML^2T^2$	$FL$
Potencia	$P$	$ML^2T^{-3}$	$FLT^{-1}$
Trabajo, energía	$W, E$	$ML^2T^{-2}$	$FL$
Densidad	$\rho$	$ML^{-3}$	$FT^2L^1$
Temperatura	$T$	$\theta$	$\theta$
Calor específico	$c_p, c_v$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
Peso específico	$\rho g$	$ML^{-2}T^2$	$FL^{-3}$
Conductividad térmica	$K$	$MLT^{-3}\theta^{-1}$	$FT^{-1}\theta^1$
Coeficiente de expansión	$\beta$	$\theta^{-1}$	$\theta^{-1}$

## Consejo Técnico

Representantes de Instituciones de Educación Superior

M.C. David César Malpica Moreda  
**Benemérita Universidad Autónoma  
de Puebla**

Dr. Ángel Flores Abad  
**Universidad Autónoma de Ciudad Juárez**

Dra. Yamel Ungson Almeida  
**Centro de Enseñanza Técnica y Superior**

Dr. Eliezer Garza González  
**Universidad Autónoma de Nuevo León**

Mtro. Miguel de Jesús Ramírez Cadena  
**Tecnológico de Monterrey**

Dr. Jorge Aurelio Brizuela Mendoza  
**Universidad de Guadalajara**

Mtra. Isabel Lascurain Gutiérrez  
**Universidad Anáhuac**

Mtro. Mauricio Alberto Ortega Ruiz  
**Universidad del Valle de México**

Dr. Oscar Omar Ovalle Osuna  
**Universidad Autónoma de Baja California**

Mtro. Jorge Alonso Ramírez Márquez  
**Universidad Politécnica de Aguascalientes**

Dr. Jorge Luis Barahona Ávalos  
**Universidad Tecnológica de La Mixteca**

Dr. Ricardo Oscar Magos Pérez  
**Universidad Tecnológica de México**

Este Formulario es un instrumento de apoyo para quienes sustentarán el Examen General para el Egreso de Ingeniería Mecatrónica (EGEL Plus IMECATRO).

El Formulario para el sustentante es un documento cuyo contenido está sujeto a revisiones periódicas. Las posibles modificaciones atienden a los aportes y críticas que hagan los miembros de las comunidades académicas de instituciones de educación superior de nuestro país, los usuarios y, fundamentalmente, las orientaciones del Consejo Técnico del examen.

El Ceneval y el Consejo Técnico del EGEL Plus IMECATRO agradecerán todos los comentarios que puedan enriquecer este material. Sírvase dirigirlos a:

**Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior, A.C.**

**Subdirección de Evaluación de Egreso  
en Diseño, Ingenierías y Arquitectura**

Av. Camino al Desierto de los Leones (Altavista) 37,

Col. San Ángel, Álvaro Obregón,

C.P. 01000, Ciudad de México.

Tel: 55 53 22 92 00 ext. 5109

[www.ceneval.edu.mx](http://www.ceneval.edu.mx)

[nancy.rodriguez@ceneval.edu.mx](mailto:nancy.rodriguez@ceneval.edu.mx)

El Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior es una asociación civil sin fines de lucro constituida formalmente el 28 de abril de 1994, como consta en la escritura pública número 87036 pasada ante la fe del notario 49 del Distrito Federal.

Sus órganos de gobierno son la Asamblea General, el Consejo Directivo y la Dirección General. Su máxima autoridad es la Asamblea General, cuya integración se presenta a continuación, según el sector al que pertenecen los asociados:

*Asociaciones e instituciones educativas:* Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior, A.C.; Federación de Instituciones Mexicanas Particulares de Educación Superior, A.C.; Instituto Politécnico Nacional; Tecnológico de Monterrey; Universidad Autónoma del Estado de México; Universidad Autónoma de San Luis Potosí; Universidad Autónoma de Yucatán; Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla; Universidad Tecnológica de México.

*Asociaciones y colegios de profesionales:* Barra Mexicana Colegio de Abogados, A.C.; Colegio Nacional de Actuarios, A.C.; Colegio Nacional de Psicólogos, A.C.; Federación de Colegios y Asociación de Médicos Veterinarios y Zootecnistas de México, A.C.; Instituto Mexicano de Contadores Públicos, A.C.

*Organizaciones productivas y sociales:* Academia de Ingeniería, A.C.; Academia Mexicana de Ciencias, A.C.; Academia Nacional de Medicina, A.C.; Fundación ICA, A.C.

*Autoridades educativas gubernamentales:* Secretaría de Educación Pública.

El Centro está inscrito desde el 10 de marzo de 1995 en el Registro Nacional de Instituciones Científicas y Tecnológicas del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, con el número 506. Asimismo, es miembro de estas organizaciones: International Association for Educational Assessment; European Association of Institutional Research; Consortium for North American Higher Education Collaboration; Institutional Management for Higher Education de la OCDE.

